

**طراحی کد رادار جهت بهینه‌سازی آشکارسازی، تحت قید خود بستگی سفید شده**پیروز مجدالاشرافی<sup>۱</sup>، مهرداد اردبیلی پور<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکترای مهندسی برق، ۲- دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

(دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۰۹، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۰۶)

**چکیده**

شکل موج ارسالی رادار، یکی از فاکتورهای تأثیرگذار در عملکرد آشکارسازی اهداف است که در توسعه رادارهای شناخت‌گرا بسیار مهم است. در این مقاله، روش ارسال تطبیقی مورد بررسی قرار می‌گیرد که به طور خاص به طراحی تطبیقی شکل موج ارسالی رادار جهت بهینه‌کردن سیگنال به تداخل (و به تبع آن آشکارسازی) می‌پردازد. شکل موج ارسالی در کلاس کدهای خطی بین پالسی فرض شده و عملکرد آن در حضور تداخل رنگی گوسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقالات متعددی به طراحی این دسته از کدها پرداخته‌اند. لیکن نکته‌ای که در همه این مقالات مغفول مانده است این است که قید شباهت تابع همبستگی بایستی بعد از فیلتر سفیدکننده گیرنده نوشته شود تا سیگنال سفیدشده با تابع همبستگی مناسب به فیلتر منطبق وارد شود. در این مقاله، ضمن معرفی قید خود بستگی سفیدشده، الگوریتمی برای حل مسئله طراحی شکل موج حاصل پیشنهاد شده است. روش فوق، روش جریمه تدریجی نام‌گذاری شده است و نشان داده شده است که دارای پیچیدگی محاسباتی چندجمله‌ای است. سپس همگرایی الگوریتم ارائه شده اثبات شده و در نهایت با شبیه‌سازی، عملکرد بهتر کد طراحی شده با روش پیشنهادی نسبت به کدهای طراحی شده با روش‌های موجود نشان داده شده است.

**کلیدواژه‌ها: طراحی شکل موج راداری، رادار شناخت‌گرا، قید شباهت خود بستگی سفید شده، بهینه‌سازی محدب،****روش جریمه تدریجی****۱- مقدمه**

دلیل اینکه طراحی شکل موج راداری به موضوع داغ محافل علمی و صنعتی تبدیل شده است، به دلیل ظهور معماری‌های پردازشی جدید، پردازشگرهای تجاری پرسرعت، مولدهای شکل موج متنوع و فرستنده‌های حالت جامد است.

شکل موج ارسالی رادار می‌تواند جهت بهبود آشکارسازی، دسته‌بندی اهداف، شناسایی نوع هدف و یا تخمین موقعیت هدف در محیط‌های با تداخل سنگین شامل کلاتر، اخلاک‌گر و فرستنده‌های اطراف استفاده شود [۱].

ارسال تطبیقی همچنین یکی از اصول مهم رادارهای شناخت‌گرا<sup>۱</sup> است [۲، ۳]. در بسیاری از حالات، شکل موج بهینه راداری از یک مسئله بهینه‌سازی مقید به دست می‌آید. این قیود می‌توانند به صورت پیش فرض در سامانه تعریف شده باشند و یا با استفاده از اطلاعاتی که در مشاهدات قبلی رادار جمع‌آوری شده است به روز رسانی شوند [۱، ۴].

طراحی تطبیقی شکل موج محدود به رادار نمانده است و نقش بسیار مهمی را در دیگر سامانه‌های حسگری فعال نظیر سونار و همچنین سامانه‌های مخابراتی و مهندسی پزشکی ایفا می‌کند [۵-۷].

احتمال آشکارسازی در رادار وابسته به انرژی سیگنالی است که

در بازه پردازش به رادار برمی‌گردد. همچنین تفکیک پذیری داپلر (سرعت) هدف بسته به بازه زمانی در دسترس برای پردازش است. از سوی دیگر تفکیک پذیری در فاصله وابستگی مستقیم به عرض باند سیگنال ارسالی دارد؛ بنابراین، جهت داشتن احتمال آشکارسازی مناسب به همراه تفکیک پذیری قابل قبول در فاصله و سرعت، بازه‌های پردازشی طولانی با حداکثر انرژی در پالس‌های باریک یا پالس‌های بلند مدوله شده مورد نیاز است. اگر بازه زمانی مشاهده هدف مشخص باشد و بهینه توان ارسالی در دسترس هم محدود باشد، راه‌حل کلاسیک طراحی شکل موج استفاده از فشرده‌سازی پالس یا کد درون پالسی است. اما این راه‌حل اثرات نامطلوبی نیز خواهد داشت. به‌عنوان مثال هشدارهای غلط ناشی از لوب‌های فرعی مدولاسیون استفاده شده در بعد فاصله می‌تواند باعث ایجاد اهداف کاذب گردد. از طرف دیگر، همین لوب‌های فرعی باعث پوشیده شدن اهداف احتمالی کوچک اطراف اهداف بزرگ‌تر می‌شود. مشکل دیگری که استفاده از مدولاسیون درون پالسی ایجاد می‌کند در مواجهه با اهداف مانوری است. تغییر فاز تحمیل شده بر مدولاسیون ناشی از تغییرات داپلر این اهداف باعث تغییر شکل تابع ابهام این سیگنال‌ها شده که اثرات مخرب جدی در عملکرد رادار می‌گذارد. نکته دیگری که باید در استفاده از کد درون پالسی به آن توجه کرد، برد کور زیاد ناشی از زمان ارسال طولانی این دسته از سیگنال‌هاست.

جهت غلبه بر این مسائل، روش جدیدی در [۸] پیشنهاد شد که

\* رایانامه نویسنده مسئول: Mehrdad@eetd.kntu.ac.ir

<sup>۱</sup> Cognitive Radars

مسئله طراحی شکل موج مقید به رادارهای MIMO هم تعمیم داده شده است. به عنوان مثال در [۱۸] مسئله طراحی یک کد چندفازی برای رادار MIMO هم مکان بررسی شده است و در [۱۹] همین مسئله همراه با قید شباهت کد و در [۲۰] با قید دامنه ثابت بررسی شده است.

در این مقاله نشان داده‌ایم که قید خود بستگی مناسب، بایستی به صورت دوری و پس از فیلتر سفیدکننده گیرنده نوشته شود. چرا که محدودکردن خصوصیات تابع خود بستگی قبل از سفیدکردن، در ورودی فیلتر منطبق سیگنالی را تولید می‌کند که خصوصیات خود بستگی آن بسته به محیط پس‌زمینه می‌تواند بسیار از آنچه مدنظر بوده است متفاوت باشد. همچنین روشی با پیچیدگی مناسب کاربردهای رادار شناخت‌گرا برای حل مسئله به بهینه‌سازی حاصل پیشنهاد شده است که همگرایی آن هم اثبات شده است.

به این منظور ابتدا در بخش ۲ مدل‌سازی استفاده شده در طراحی شکل موج توضیح داده شده است تا فرمول‌بندی ریاضی تابع هدف و قیود مسئله مشخص گردد. سپس در بخش ۳ بر اساس مدل‌های ارائه شده، فرم مسئله بهینه‌سازی حاصل به دست آمده است. بخش ۴ به بیان روش پیشنهادی جهت حل مسئله فوق تخصیص یافته است و الگوریتمی جهت یافتن کد بهینه راداری ارائه گردیده است. در بخش ۵ همگرایی روش پیشنهادی به اثبات رسیده است و بخش ۶ به اثبات پیچیدگی چندجمله‌ای این روش می‌پردازد. در بخش ۷ با استفاده از شبیه‌سازی در محیط‌های مختلف، مزیت روش پیشنهادی در عملکرد کد طراحی شده نشان داده شده است و در نهایت بخش ۸ به نتیجه‌گیری و جمع‌بندی اختصاص یافته است.

## ۱-۱- نشانه‌گذاری

در این مقاله حروف کوچک با فونت درشت برای نشان دادن بردارها و حروف بزرگ با فونت درشت برای نشان دادن ماتریس‌ها استفاده می‌شود. عملگرهای ترانهاده، مزدوج مختلط و هرمیتین نیز به ترتیب با  $(\cdot)^T$ ،  $(\cdot)^*$  و  $(\cdot)^H$  نشان داده می‌شود. همچنین  $\text{tr}(\cdot)$  نشان‌دهنده رد ۶ ماتریس،  $\text{rank}(\cdot)$  نشان‌دهنده مرتبه آن و  $\lambda_{\max}(\cdot)$  معرف بزرگترین مقدار ویژه آن می‌باشد.  $C^N$  نیز نشان‌دهنده مجموعه بردارهای مختلط  $N$ -تایی است. همچنین سمبل  $\succ$  برای نشان دادن ماتریس مثبت نیمه معین استفاده شده است. نرم  $L$  بردار  $x$  به صورت  $\|x\|_L$  نشان داده می‌شود و در نهایت  $\odot$  نشان‌دهنده ضرب عنصر به عنصر هادامارد است.

## ۲- مدل سامانه و فرمول‌بندی مسئله

همان‌گونه که ذکر شد در این مقاله تمرکز طراحی شکل موج

کد بین پالسی نامیده شد. با این روش رسیدن به نمایه‌های ایده‌آل تابع ابهام ممکن بود. در روش کد بین پالسی که به آن کد راداری هم گفته می‌شود، به جای استفاده از پالس‌های گذشته بلند با نرخ تکرار کم، پالس‌های گذشته باریک با نرخ ارسال بالا ساطع می‌گردد. اما چرخه کاری<sup>۲</sup> و بیشینه توان ارسالی فرستنده در دو روش یکسان می‌باشد. در این روش، به لطف امکان استفاده از خود بستگی<sup>۳</sup> دوری و پالس‌های کوتاه ارسالی، تحت هزینه عملکردی بسیار کمی، تقریباً تمام مشکلات مترتب به کد درون پالسی مرتفع شده بود. اما در بسیاری از مقالاتی که از کد راداری استفاده می‌کنند، مزایای استفاده از خود بستگی دوری در طراحی کد رادار و در تعریف مسئله بهینه‌سازی مربوطه فراموش شده است. به عنوان مثال در [۹] یک روش طراحی کد راداری پیشنهاد شده است که از قید شباهت بین کد ارسالی و یک کد با خصوصیات خود بستگی مطلوب استفاده می‌کند. لیکن این مقاله کد معیار را کدی در نظر گرفته است که به جای داشتن خود بستگی دوری مناسب (مانند کدهای Px)، خود بستگی غیر دوری مطلوبی دارد. در مقالات مهم [۱۰] و [۱۱] هم استفاده از خود بستگی دوری فراموش شده است.

در بسیاری از مقالاتی که به طراحی کدهای راداری می‌پردازند جهت کنترل تابع ابهام و تغییرات دامنه کد طراحی شده از قید شباهت کد استفاده می‌کنند [۹، ۱۲-۱۵]. مساله‌ای که در رابطه با قیود شباهت کد مطرح است، این است که ابتدا بایستی یک کد معیار مناسب برای طول کد موردنظر طراحی یافته شود که پیچیدگی مسئله طراحی شکل موج را دوچندان می‌کند. در حالی که خواص مهم کد طراحی شده در تابع خود بستگی<sup>۴</sup> آن و تغییرات پوش آن قابل تعریف و مشاهده است. در [۱۱] از قید توان حداکثری به توان متوسط سیگنال ارسالی استفاده شده است که برای استفاده از تقویت‌کننده‌های کلاس B و C ضروری است. روش پیشنهادی در این مقاله برای حل مسئله بهینه‌سازی حاصل، استفاده از روش تصادفی‌سازی<sup>۵</sup> است. همچنین جهت مقاوم کردن سیگنال طراحی شده به تغییرات فرکانس داپلر هدف در مقالات [۱۰] و [۱۱] یک روش Max-Min پیشنهاد شده است. اما در هیچکدام از این مقالات، مسئله یافتن کد معیار اولیه برای استفاده در قید شباهت برطرف نشده است. همچنین اخیراً در مقالاتی مانند [۱۶] و [۱۷] طراحی کدی با طیف فرکانسی چابک جهت تطبیق با مقررات رگولاتوری و سازگاری الکترومغناطیسی و محدودیت‌های توان و عرض باند موجود مطرح شده است.

<sup>1</sup> Profile

<sup>2</sup> Duty Cycle

<sup>3</sup> Auto-Correlation (AC)

<sup>4</sup> Auto-Correlation Function (ACF)

<sup>5</sup> Randomization

<sup>6</sup> Trace

$$(c \odot p)^H M^{-1} (c \odot p) \quad (۶)$$

## ۲-۱- قید دقت داپلر

در [۹] نشان داده شده است که با استفاده از قید زیر می توان حد کرامر- رائوی تخمین فرکانس را محدود کرد:

$$(c \odot p \odot u)^H M^{-1} (c \odot p \odot u) \geq \delta_a \quad (۷)$$

در رابطه (۷)،  $u = [1, j2\pi, \dots, j2\pi(N-1)]^T$  و  $\delta_a$  ثابتی است که میزان محدودیت را کنترل می نماید. در حالت کلی می توان برای تخمین تمام پارامترهای هدف قید دقت تعریف نمود و بسته به مدل سیستم، آن را به مسئله طراحی شکل موج بهینه افزود. در صورت مسئله پیش رو، مادامی که مدل سیستم جهت طراحی کد راداری نوشته شود، بحث درباره دقت استخراج فاصله هدف بی معنی است. چرا که پردازش سیگنال برگشتی برای یک هدف نقطه ای، به طور مستقل روی تمام نمونه های دریافتی هم تاخیر انجام می شود. بنابراین در صورت آشکار شدن هدف، فاصله آن از پیش معین است.

## ۲-۲- قید شباهت تابع خود بستگی

خواصی که تاکنون برای مسئله طراحی کد رادار ذکر شد، هیچ کنترلی بر شکل تابع ابهام<sup>۳</sup> کد طراحی شده ندارند. راه حلی که در مقاله [۹] و بسیاری مقالات دیگر برای حل این مشکل پیشنهاد شده است، تحمیل یک قید شباهت با یک کد معیار به کد راداری در دست طراحی است. کد معیار به گونه ای انتخاب می شود که تابع ابهام مطلوبی داشته باشد. لیکن این راه حل دو مسئله ثانویه ایجاد می کند. نخست اینکه فاصله قابل قبول کد طراحی شده با کد معیار به هیچ عنوان تضمین کننده تابع ابهام قابل قبول بعد از عبور کد از فیلتر سفیدکننده گیرنده بهینه نیست. به عبارتی دیگر در محیط های با سیگنال پس زمینه رنگی (مانند محیط های کلاتری و یا دارای جمینگ) شباهت کد در دست طراحی با کد معیار بایستی بعد از فیلتر سفید کننده نوشته شود. مشکل دیگر اینکه با روش قید شباهت، برای طراحی هر کد راداری، بایستی ابتدا یک کد معیار با همان طول و با خواص همبستگی مناسب پیدا کرد که خود مسئله بهینه سازی دیگری است و پیچیدگی طراحی را دوچندان می کند.

از طرف دیگر، همان گونه که می دانیم آنچه از تابع ابهام و نمایه زمانی یک کد برای طراح اهمیت دارد، گلبه های فرعی کد طراحی شده و تغییرات پوش آن است که هر دوی این خواص را می توان بدون استفاده از یک کد معیار مستقیماً روی خود کد راداری مفید نمود. همچنین همان گونه که در مقدمه ذکر شد، اگر هدف طراحی کد راداری است، بایستی خصوصیات تابع

بر کد راداری است. لیکن تعمیم نتایج به سایر انواع شکل موج های راداری بسیار ساده است. یک رادار تک پایه را فرض می کنیم که  $N$  پالس همدوس را ارسال می کند. اگر شکل موج پالس راداری را با  $p(t)$  نشان دهیم، می توان نشان داد سیگنال دریافتی از یک هدف نقطه ای با فرکانس داپلر  $f_d$  (بعد از انتقال به باند پایه و عبور از فیلتر منطبق پالس ارسالی) به صورت زیر خواهد بود [۹]:

$$v(t_k) = \alpha c(k) e^{j2\pi k f_d T_r} \chi_p(0, f_d) + w(t_k), \quad (۱)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

در رابطه (۱)،  $\alpha$  عددی مختلط است که مدل کننده سطح مقطع راداری هدف و اثرات انتشار کانال است.  $c(k)$  نشان دهنده کد راداری است و  $T_r$  برابر دوره تناوب تکرار پالس رادار است.  $w$  سیگنال پس زمینه است که می تواند شامل نویز، کلاتر و یا اختلال باشد.  $\chi_p(\tau, f_d)$  معرف تابع ابهام پالس ارسالی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi_p(\tau, f_d) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\beta) p^*(\beta - \tau) e^{j2\pi f_d \beta} d\beta \quad (۲)$$

با تعریف بردار  $c = [c(1), c(2), \dots, c(N)]^T \in \mathbb{C}^N$  به عنوان کد ارسالی و با فرض اینکه  $\chi_p(0, f_d) = \chi_p(0, 0) = 1$  بردار اندازه گیری  $v$  به صورت زیر مدل می شود:

$$v = \alpha c \odot p + w \quad (۳)$$

بردار  $p$  که به بردار سوددهی زمانی<sup>۱</sup> معروف است به صورت زیر تعریف می شود:

$$p = [1, e^{j2\pi f_d T_r}, \dots, e^{j2\pi(N-1)f_d T_r}]^T \quad (۴)$$

در رابطه (۳) فرض می کنیم که بردار  $w$  یک بردار گوسی دایروی با ماتریس کواریانس  $M$  است که مدل کننده نویز پس زمینه باند پایه بعد از فیلتر منطبق پالس ارسالی است.

می توان نشان داد که سیگنال به نویز قابل حصول از یک هدف نقطه ای غیر نوسانی (NFT) و یا یک هدف با نوسانات دامنه رابلی (RFT<sup>۲</sup>) با ممان دوم  $\sigma_\alpha^2 = E[|\alpha|^2]$  به صورت زیر است:

$$SINR = \begin{cases} |\alpha|^2 (c \odot p)^H M^{-1} (c \odot p) & NFT \\ \sigma_\alpha^2 (c \odot p)^H M^{-1} (c \odot p) & RFT \end{cases} \quad (۵)$$

از آنجایی که احتمال آشکارسازی یک تابع صعودی از سیگنال به نویز دریافتی است، بنابراین کد راداری حاصل از بیشینه کردن احتمال آشکارسازی، همان کد راداری حاصل از بیشینه کردن سیگنال به نویز خواهد بود؛ بنابراین، تابع هدف مسئله طراحی شکل موج به صورت زیر تعریف می شود:

<sup>۱</sup> Temporal Steering Vector

<sup>۲</sup> Rayleigh Fluctuating Target

<sup>۳</sup> Ambiguity Function

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_c \quad c^H R c \\ s. t. \quad c^H c = 1 \\ \quad \quad c^H R c \geq \delta_a \\ \quad \quad \|r_{pw} - r_0\|_v \leq \zeta \\ r_{pw}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_{nw} c_{(n+k)w}^* \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \quad \quad c_w = M^{-1/2} c \\ N \|c\|_\infty \leq PAPR \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (14)$$

در مسئله (۱۴)  $c^H c = 1$  نشان‌دهنده نرمالیزه بودن انرژی سیگنال ارسالی است.

#### ۴- روش پیشنهادی جهت حل تطبیقی مسئله طراحی شکل موج

مسئله استخراج شده در (۱۴) یک مسئله QCQP<sup>۳</sup> غیر محدب است. حل این مسئله در حالت کلی یک مسئله با پیچیدگی غیر چندجمله‌ای<sup>۴</sup> است. بنابراین، برای استخراج تطبیقی شکل موج بهینه بر اساس ماتریس کواریانس تخمین زده شده از محیط نیاز به روشی داریم که بتواند پیچیدگی محاسباتی مسئله را کاهش دهد. به این منظور نیاز به آزادسازی<sup>۵</sup> مسئله است. در این مقاله از تبدیل مسئله QCQP به مسئله SDP/SOCP<sup>۶</sup> برای آزادسازی استفاده شده است. به این منظور با تعریف ماتریس رتبه ۱  $C = cc^H$  مسئله (۱۴) به شکل زیر قابل تبدیل است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_c \quad -tr(CR) \\ s. t. \quad tr(C) = 1 \\ \quad \quad tr(CR_1) \geq \delta_a \\ \quad \quad C_w = M^{-1/2} C M^{-1/2} \\ r_{pw}(k) = \sum_{n=1}^{N-1} C_{w,i,i+k} \\ \|r_{pw} - r_0\|_v \leq \zeta \\ C_{w,i,i} < PAPR \\ Rank(C) = 1 \end{array} \right. \quad (15)$$

بنابراین، مسئله (۱۵) آماده است تا با آزادسازی SDP/SOCP به مسئله  $Rank(C) = 1$  به  $C \geq 0$  تبدیل به مسئله استاندارد شود. بدیهی است که اندیسهای  $C_w$  نیز به پیمانته  $N$  محاسبه می‌شوند.

این مسئله آزاد شده را می‌توان با پیچیدگی قابل قبول توسط روش نقطه داخلی<sup>۸</sup> حل نمود [۲۱]. لیکن بعد از حل آن و یافتن

همبستگی متناوب کد مورد بررسی قرار بگیرد.

در این مقاله قیود موردنظر بعد از فیلتر سفیدکننده روی کد راداری اعمال شده است و روشی برای حل مسئله بهینه‌سازی حاصل پیشنهاد شده است. با این رویکرد قید کنترل تابع خود بستگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|r_{pw} - r_0\|_v \leq \zeta \quad (8)$$

در رابطه (۸)  $r_{pw}$  تابع خود بستگی متناوب بعد از فیلتر سفیدکننده گیرنده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_{pw}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_{nw} c_{(n+k)w}^* \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (9)$$

در رابطه (۹)  $c_{nw}$  کد ارسالی بعد از عبور از فیلتر سفیدکننده است و کلیه اندیسها به پیمانته  $N$  محاسبه می‌شود.

همچنین  $r_0$  نمایه‌ای است که مد نظر طراح برای تابع خود بستگی است و  $\zeta$  معیار قرابت به این نمایه است. بدیهی است که نمایه معیار نیاز به سفید کردن ندارد. در این معادلات، تمام بردارهای همبستگی به صورت یک تعریف می‌شوند و چنانچه  $r_0$  به صورت تابع ضربه در نظر گرفته شود، قید شباهت خود بستگی به قید سطح گلبرگ‌های فرعی تجمیع شده<sup>۱</sup> تبدیل می‌شود.

از سوی دیگر، قید نوسانات توان سیگنال کد طراحی شده به صورت زیر قابل تعریف است:

$$PAPR = \frac{\max_{i=1,2,\dots,N} |c_i|^2}{\frac{1}{N} \|c\|_v^2} \quad (10)$$

از آنجایی که بردار کد نرمالیزه فرض می‌شود، بنابراین قید تغییرات توان به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$PAPR = N \max_{i=1,2,\dots,N} |c_i|^2 \quad (11)$$

بدیهی است با قراردادن  $PAPR = 1$  قید تغییرات توان به قید پوش ثابت<sup>۲</sup> تبدیل می‌شود.

#### ۳- مسئله طراحی شکل موج

با تعریف

$$R = M^{-1} \odot (pp^H)^* \quad (12)$$

و

$$R_1 = M^{-1} \odot (pp^H)^* \odot (uu^H)^* \quad (13)$$

مسئله طراحی شکل موج به صورت زیر قابل تعریف است:

<sup>3</sup> Quadratically Constrained Quadratic Programming

<sup>4</sup> NP-Hard

<sup>5</sup> Relaxation

<sup>6</sup> Semi-Definite Programming/ Second-Order Cone Programming

<sup>7</sup> Rank-1 Matrix

<sup>8</sup> Interior Point Method

<sup>1</sup> Integrated Sidelobe Level (ISL)

<sup>2</sup> Constant Modulus

شده است و برابر است با:

$$\nabla \lambda(\mathbf{C}_0) = \mathbf{q}\mathbf{q}^H \quad (19)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{C}) \approx \lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) + \text{tr}((\mathbf{q}_{\max}\mathbf{q}_{\max}^H)^H (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)) \quad (20)$$

بنابراین، با حذف جمله‌های مستقل از  $\mathbf{C}$  تابع هدف به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$-\text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{R}) - \eta \text{tr}(\mathbf{q}_{\max}\mathbf{q}_{\max}^H\mathbf{C}) \quad (21)$$

با استفاده از این تابع هدف، مسئله (۱۵) دوباره به صورت زیر به فرم SDP/SOCP تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{C}} \quad -\text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{R}) - \eta \text{tr}(\mathbf{q}_{\max}\mathbf{q}_{\max}^H\mathbf{C}) \\ \text{s.t.} \quad \text{tr}(\mathbf{C}) = 1 \\ \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{R}) \geq \delta_a \\ \mathbf{C}_w = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} \\ \mathbf{r}_{pw}(k) = \sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{C}_{W_{i,i+k}} + \mathbf{C}_{W_{i,i+N-k}} \\ \|\mathbf{r}_{pw} - \mathbf{r}_0\|_1 \leq \zeta \\ \mathbf{C}_{W_{i,i}} < \text{PAPR} \\ \mathbf{C} \succeq 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

الگوریتم پیشنهادی جریمه تدریجی در جدول (۱) نشان داده شده است. در بخش ۷ عملکرد کد طراحی شده از روش پیشنهادی را با کدهای طراحی شده با روش‌های موجود مقایسه شده است.

جدول (۱). الگوریتم پیشنهادی GPP

ورودی	$M, R, R1, r_0, \delta_a, \zeta, \text{PAPR}, \tau$
خروجی	$\mathbf{C}^*$
مرحله ۱	مقدار اولیه‌ای برای $\eta$ و $\mathbf{C}_0$ (با معادل آن برای $\mathbf{q}_{\max}$ بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه آن) انتخاب می‌کنیم.
مرحله ۲	مسئله بهینه‌سازی حاصل را حل می‌کنیم و پاسخ به دست آمده را $\mathbf{C}^{(k)}$ می‌نامیم.
مرحله ۳	با استفاده از $\mathbf{C}^{(k)}$ بردار $\mathbf{q}_{\max}$ متناظر با آن را پیدا کرده و به مرحله ۲ برمی‌گردیم. این حلقه تا ارضای شرط همگرایی آن و رسیدن به جواب $\mathbf{C}^*$ ادامه می‌یابد.
مرحله ۴	مقدار $\eta$ را در یک ضریب بزرگ‌تر از یک ( $\sigma$ ) ضرب می‌کنیم.
مرحله ۵	مراحل ۲ و ۳ و ۴ را تا ارضای شرط $\lambda_{\max}(\mathbf{C}^*) - 1 < \tau$ ادامه می‌دهیم.
مرحله ۶	$\mathbf{C}^* = \mathbf{q}_{\max}(\mathbf{C}^*)$ کد مطلوب راداری است.

$\mathbf{C}^*$  نیاز به حل مسئله بهینه‌سازی دیگری است که به آن مسئله تجزیه رتبه ۱<sup>۱</sup> گفته می‌شود. روش پیشنهادی در این مقاله برای پرهیز از حل مسئله تجزیه، به طور تدریجی قید رتبه ۱ بودن ماتریس  $\mathbf{C}$  را به تابع هدف به صورت تابع جریمه اضافه می‌کند. در این روش پیشنهادی با استفاده از بسط تیلور ماتریسی، فرم SDP/SOCP مسئله حفظ شده و جواب بدست آمده رتبه ۱ خواهد بود. در ادامه به توضیح این روش می‌پردازیم.

#### ۴-۱- روش جریمه تدریجی<sup>۲</sup>

باتوجه به اینکه ماتریس  $\mathbf{C}$  یک ماتریس مثبت معین است، قید رتبه ۱ بودن آن را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_{\max}(\mathbf{C}) \quad (16)$$

بنابراین، قید رتبه ۱ را می‌توان به صورت تابع هزینه  $|\text{tr}(\mathbf{C}) - \lambda_{\max}(\mathbf{C})|$  به تابع هدف اضافه نمود که در آن  $\eta$  ضریب هزینه می‌باشد. اما با توجه به مثبت معین بودن ماتریس  $\mathbf{C}$  همواره  $\text{tr}(\mathbf{C}) \geq \lambda_{\max}(\mathbf{C})$  خواهد بود و در نتیجه می‌توان از قدر مطلق درون تابع هزینه صرف نظر کرد. از طرف دیگر قید انرژی کد ارسالی بیان می‌دارد که  $\text{tr}(\mathbf{C}) = 1$  باشد. بنابراین تابع هزینه به فرم  $(1 - \lambda_{\max}(\mathbf{C}))\eta$  در خواهد آمد. در مرجع [۲۲] نشان داده شده است که با افزایش  $\eta$  می‌توان جوابی برای مسئله (۱۵) یافت.

اکنون نوبت آن است که روشی برای پیدا کردن  $\mathbf{C}^*$  به ازای  $\eta$  ثابت بیابیم. چرا که اضافه کردن تابع هزینه دوباره مسئله را غیرمحدب کرده است. روشی که در این بخش جهت حل معضل بالا استفاده شده است، روش تفاضل محدب<sup>۳</sup> می‌باشد. این روش هنگامی کاربرد دارد که بتوان یک تابع غیرمحدب را به صورت تفاضل دو تابع محدب نشان داد [۲۳]. از آنجاییکه تابع  $\lambda_{\max}(\mathbf{C})$  یک تابع محدب است، می‌توان روش DC را برای حل این مسئله به کار برد. در [۲۴] نشان داده شده است که جهت حل یک مسئله از روش DC، بخش محدب تابع دست نخورده باقی می‌ماند، در حالیکه بسط تیلور برای بخش مقعر تابع نوشته می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda(\mathbf{C})\mathbf{q} = \mathbf{C}\mathbf{q} \rightarrow \lambda(\mathbf{C}) = \mathbf{q}^H\mathbf{C}\mathbf{q} \quad (17)$$

در رابطه (۱۷) بردار ویژه نرمالیزه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  می‌باشد. بنابراین با تعمیم بسط تیلور به توابعی از ماتریس خواهیم داشت:

$$\lambda(\mathbf{C}) \approx \lambda(\mathbf{C}_0) + \text{tr}(\nabla \lambda(\mathbf{C}_0)^H (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)) \quad (18)$$

در رابطه (۱۸)  $\nabla \lambda(\mathbf{C}_0)$  ماتریسی است که از مشتق اول تابع  $\lambda$  نسبت به تک تک المانهای ماتریس  $\mathbf{C}$  در نقطه  $\mathbf{C}_0$  تشکیل

<sup>1</sup> Rank-1 Decomposition

<sup>2</sup> Gradually Penalizing Programming

<sup>3</sup> Difference of Convex

در رابطه (۲۷)  $C = [C_q C_s]^T$  مجموعه متغیرهای مستقل مسئله است. از این متغیرها  $C_s \in \mathcal{K}^S$  متغیرهای قیود مخروط نیمه معین هستند که حاصل ضرب  $s$  مخروط لورنتز نیمه معین به فرم  $\mathcal{K}^S = \mathcal{K}_1^S \times \mathcal{K}_2^S \times \dots \times \mathcal{K}_s^S$  می‌باشند. به همین منوال  $C_q \in \mathcal{K}^Q$  نماینده متغیرهای مخروط درجه ۲ به صورت  $\mathcal{K}^Q = \mathcal{K}_1^Q \times \mathcal{K}_2^Q \times \dots \times \mathcal{K}_q^Q$  می‌باشند. در نهایت ماتریس متغیر  $C$  عضو مجموعه‌ای در فضای  $\mathcal{K}^Q \times \mathcal{K}^S$  خواهد بود.

در مرجع [۲۱] نشان داده شده است که مسئله فوق با استفاده از الگوریتم نقطه داخلی با بیشینه پیچیدگی زیر قابل حل خواهد بود:

$$O(L(m^\nu \sum_{i=1}^{N_{SOC}} n_i^{soc} + m^\nu \sum_{i=1}^{N_{SD}} (n_i^{sd})^\nu + m \sum_{i=1}^{N_{SD}} (n_i^{sd})^\nu + m^\nu) \log(1/\delta)) \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)  $\delta$  نشان دهنده میزان تقرب موردنظر به نقطه بهینه است. همچنین  $L$  تعداد تکرارهای حل عددی مسئله است. همچنین در این رابطه  $m$  نشاندهنده تعداد قیود خطی مسئله،  $N_{SD}$  تعداد قیود مثبت نیمه معین و  $N_{SOC}$  معرف تعداد قیود مرتبه ۲ است. با توجه به اینکه  $n_i^{soc}$  و  $n_i^{sd}$  به ترتیب ابعاد نامین مخروط مثبت نیمه معین و درجه ۲ هستند، پیچیدگی چندجمله‌ای راه حل پیشنهادی مشهود است

### ۷- شبیه‌سازی عملکرد کد و نتایج آن

در این بخش، عملکرد کد طراحی شده با روش پیشنهادی از لحاظ احتمال آشکارسازی و خواص تابع همبستگی با کد طراحی شده توسط روش‌های موجود با قید شباهت تابع خود بستگی مقایسه می‌گردد.

به این منظور فرض شده است که ماتریس کواریانس سیگنال پس‌زمینه یک ماتریس توپلیتز<sup>۱</sup> باشد. جهت جامعیت تحلیل دو فرم برای ماتریس کواریانس فرض می‌شود. ابتدا فرض می‌کنیم ماتریس کواریانس دارای فرم نمایی به صورت زیر است:

$$M(i, j) = \rho^{|i-j|} \quad (29)$$

در ادامه تحلیل‌ها برای ماتریس کواریانس به فرم گوسی نیز تکرار می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$M(i, j) = \rho^{|i-j|} \quad (30)$$

ماتریس کواریانس سیگنال پس‌زمینه اگر ناشی از کلاتر باشد، به جنس محیط پیرامون وابسته است. این ماتریس برای

<sup>۱</sup>Toeplitz

### ۵- تحلیل همگرایی تابع هدف روش پیشنهادی

همان‌گونه که در بخش ۱-۴ ذکر شد، در مرجع [۲۲] نشان داده شده است که با افزایش  $\eta$  می‌توان به جوابی از مسئله (۱۵) رسید. حال نوبت آن است که ثابت کنیم، به ازای یک  $\eta$  ثابت روش DC به کار رفته جهت حل مسئله میانی (۲۲) همگراست. جهت بررسی این موضوع، فرض می‌کنیم در تکرار  $k$  ام از الگوریتم DC، پاسخ  $C^*$  بدست آمده را با  $C_k$  نشان دهیم. در اینصورت مسئله در تکرار  $k+1$  به صورت زیر در می‌آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_c \quad -tr(CR) - \eta tr(q_{max}(C_k) q_{max}^H(C_k) C) \\ S. t. \quad tr(C) = 1 \\ \quad \quad tr(CR) \geq \delta_a \\ \quad \quad C_w = M^{-1/\nu} C M^{-1/\nu} \\ \quad \quad r_{pw}(k) = \sum_{n=1}^{N-1} C_{W_{i,i+k}} + C_{W_{i,i+N-k}} \\ \quad \quad \|r_{pw} - r_0\|_v \leq \zeta \\ \quad \quad C_{W_{i,i}} < PAPR \\ \quad \quad C \geq 0 \end{array} \right. \quad (23)$$

تابع  $g(C, \eta_0)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(C, \eta_0) \triangleq -tr(CR) + \eta_0 [1 - \lambda_{max}(C)] \quad (24)$$

بنابراین، تقریب تابع  $g(C, \eta_0)$  در نقطه  $C_k$  برابر خواهد بود با:

$$\hat{g}(C, C_k, \eta_0) \triangleq -tr(CR) + \eta_0 [1 - \lambda_{max}(C_k) - tr(q_{max}(C_k) q_{max}^H(C_k)(C - C_k))] \quad (25)$$

برای اثبات همگرایی زیر مسئله، تنها کافی است ثابت کنیم تابع  $g(C_k, \eta_0)$  یک تابع غیرافزایشی در تکرارهای متوالی است. به این منظور نشان می‌دهیم نامساویهای زیر صحیح است:

$$\begin{aligned} g(C_{k+1}, \eta_0) &\leq \hat{g}(C_{k+1}, C_k, \eta_0) \\ &\leq \hat{g}(C_k, C_k, \eta_0) \\ &= g(C_k, \eta_0) \end{aligned} \quad (26)$$

در رابطه (۲۶) به سادگی می‌توان دید که به ازای هر ماتریس مثبت معین  $C$  نامساوی  $g(C, \eta_0) \leq \hat{g}(C, C_k, \eta_0)$  برقرار است. صحت نامساوی دوم هم از آنجا ناشی می‌شود که نقطه  $C_{k+1}$  کمینه کننده تابع  $\hat{g}(C, C_k, \eta_0)$  است. بنابراین همگرایی زیرمساله DC اثبات می‌گردد.

### ۶- تحلیل پیچیدگی محاسباتی روش

در این بخش، به بررسی پیچیدگی محاسباتی الگوریتم پیشنهادی پرداخته، نشان می‌دهیم که روش فوق دارای پیچیدگی محاسباتی چندجمله‌ای است.

ابتدا مسئله را به فرم استاندارد زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_c \quad tr(CR) \\ S. t. \quad A_i C + b_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad C \in K \end{array} \right. \quad (27)$$

نمونه‌های تابع ACF کد طراحی شده در محیط‌های با ثابت خود بستگی بالاتر می‌رسد. بنابراین می‌توان ملاحظه کرد که با افزایش  $\rho$  و رنگی تر شدن سیگنال پس زمینه (مانند شرایط حضور کلاتر) بهبود روش پیشنهادی محسوس تر می‌شود. دلیل این امر این است که در محیط‌های رنگی تر، در نظر گرفتن اثر فیلتر سفیدکننده بر کد طراحی شده، اثر مخرب تری بر عملکرد کد داشته و بنابراین بهبود روش پیشنهادی نسبت به روش متداول مشهودتر می‌شود.

در شکل‌های ۵ تا ۸ نیز مشابه همین تحلیل‌ها برای سیگنال پس‌زمینه با ماتریس کواریانس گوسی صورت گرفته است. در این حالت نیز بهبود روش پیشنهادی مشهود است. انتظار داریم که در این محیط‌ها، حساسیت عملکرد کد طراحی شده نسبت به تغییر ثابت خود بستگی  $\rho$  بیشتر باشد. چرا که تغییرات طیفی محیط با ماتریس کواریانس گوسی به‌ازای یک تغییر ثابت در  $\rho$  بسیار بیشتر از تغییر طیفی رخ داده در محیطی با ماتریس کواریانس نمایی خواهد بود. این پدیده در مقایسه شکل‌های (۵) با (۶) برای کد کوتاه و مقایسه شکل‌های ۷ و ۸ برای کد بلند قابل مشاهده است. دیده می‌شود که بهبود ۱۰ درصدی روش پیشنهادی برای  $\rho = 0.1$  به بیش از ۸۰ درصد در بعضی نمونه‌ها برای  $\rho = 0.8$  می‌رسد. برای کد بلند هم به همین منوال، بهبود ۲۰ درصدی به ازای  $\rho = 0.1$  در برخی نمونه‌ها به بیش از ۸۰ درصد به ازای  $\rho = 0.8$  می‌رسد.

در شکل (۹) جهت مقایسه دقیق‌تر، پارامترهای PSL و ISL حاصل از دو روش طراحی به‌ازای ماتریس‌های کواریانس پس‌زمینه نمایی مختلف نشان داده شده است. در این شکل هم دیده می‌شود که اگرچه پارامترهای تابع خود بستگی کد حاصل از روش پیشنهادی در محیط‌های سفید با کد حاصل از قید شباهت متداول یکی است، لیکن با افزایش  $\rho$  بهبود پارامتر PSL به ۱۰ درصد و بهبود پارامتر ISL به حدود ۳۰ درصد می‌رسد. این امر از آنجا ناشی می‌شود که در محیط‌های با پس‌زمینه سفید، عملاً روش پیشنهادی تفاوتی با قید شباهت متداول ندارد و انتظار بهبودی هم در کد طراحی شده نداریم. لیکن با افزایش ثابت خود بستگی، تغییر قید شباهت اثر خود را در این پارامترها نشان می‌دهد.

شکل (۱۰) بهبود سیگنال به نویز حاصل از کد طراحی شده با قید همبستگی دوری سفید شده را نسبت به قید رایج شباهت کد نشان می‌دهد. بدیهی است در این مقایسه مابقی پارامترهای طراحی به‌گونه‌ای انتخاب گردیده است که ACF هر دو کد طراحی شده یکسان باشند.

پوشش‌های مختلف زمین و نوع آب‌های مختلف مقادیر مختلفی به خود می‌گیرد. لیکن اگر پوشش و جنس محیط را یکسان فرض کنیم، میزان ناهمواری سطح نیز در شکل ماتریس کواریانس مؤثر است. چنان‌که هر چقدر محیط ناهموارتر باشد، تغییرات شدیدتر بوده و ماتریس کواریانس به فرم گوسی نزدیک‌تر می‌شود. از سوی دیگر برای سطوح هموار ماتریس کواریانس به فرم نمایی مناسب‌تر است [۲۵].

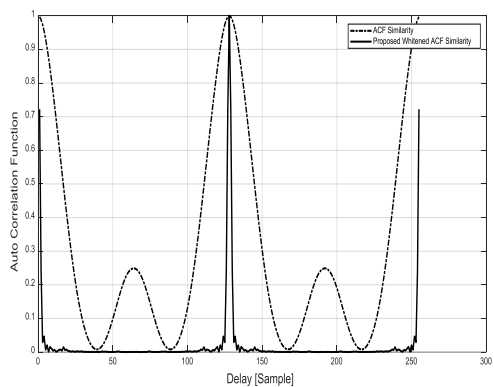
همچنین شبیه‌سازی‌ها برای طول کد کوتاه ( $N=128$ ) و طول کد بلند ( $N=128$ ) انجام شده است و پارامترهای احتمال هشدار غلط و  $\delta_a$  برابر  $10^{-6}$  قرار داده شده است. در شبیه‌سازی‌های انجام شده حداکثر گلبزرگ فرعی ۱ و سطح گلبزرگ‌های فرعی تجمیع شده به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۶]:

$$PSL = \max\{|r_{pw}(k)|\}_{k=1}^{N-1} \quad (31)$$

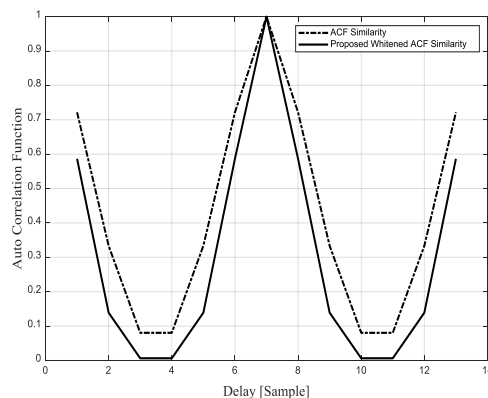
$$ISL = \sum_{k=1}^{N-1} |r_{pw}(k)|^2$$

در رابطه (۲۵)  $r_{pw}(k)$  نمونه‌های نرمالیزه شده تابع خود بستگی هستند.

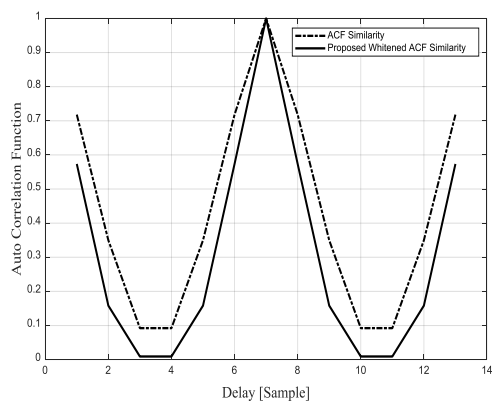
برای اینکه بتوان مقایسه قابل استنادی بین روش‌ها انجام داد دیگر پارامترهای شبیه‌سازی به‌گونه‌ای تعیین شده‌اند که هر دو روش به یک احتمال آشکارسازی منجر شود. جهت درک شهودی تفاوت بین توابع خود بستگی حاصل از روش طراحی پیشنهادی و روش معمول قید شباهت، تابع خود بستگی حاصل از دو روش در شکل‌های ۱ تا ۸ نشان داده شده است. در شکل‌های ۱ تا ۴ ماتریس کواریانس نویز پس‌زمینه نمایی فرض شده است. شکل‌های ۱ و ۲ به مقایسه کدهای حاصل از طراحی در طول‌های کوتاه ( $N=7$ ) و شکل‌های ۳ و ۴ به مقایسه نتایج در کدهای طول بلند ( $N=128$ ) می‌پردازد. در شکل ۱ مشاهده می‌شود که برای کدهای کوتاه و محیط‌های با همبستگی کم، روش پیشنهادی کدی به دست می‌دهد که در بعضی نمونه‌ها تا ۱۰ درصد تابع خود بستگی بهتری نسبت به قید شباهت معمول تابع ACF دارد. انتظار می‌رود که با افزایش همبستگی سیگنال پس‌زمینه، میزان این بهبود بیشتر شود. در شکل ۲ مشاهده می‌شود که با افزایش ثابت همبستگی میزان بهبود تابع ACF بدست آمده از روش پیشنهادی در جاهایی به بیش از ۶۰ درصد می‌رسد. وضعیت برای کدهای بلند در شکل‌های ۳ و ۴ هم به همین صورت است. به‌گونه‌ای که بهبود ۲۰ درصدی در محیطی با ثابت خود بستگی کم، به بیش از ۷۰ درصد در بعضی از



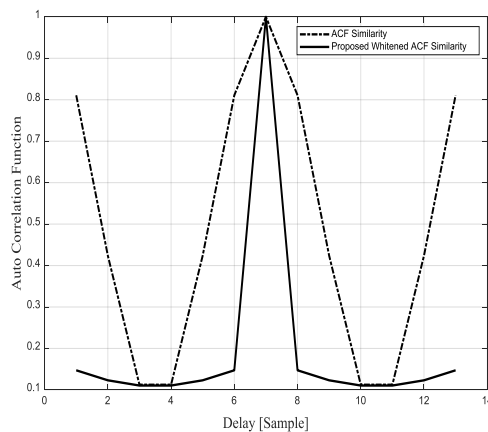
شکل (۴). مقایسه خصوصیات خود بستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد به ازای  $\rho = 0.8$  و ماتریس پس‌زمینه نمایی برای کد طول بلند



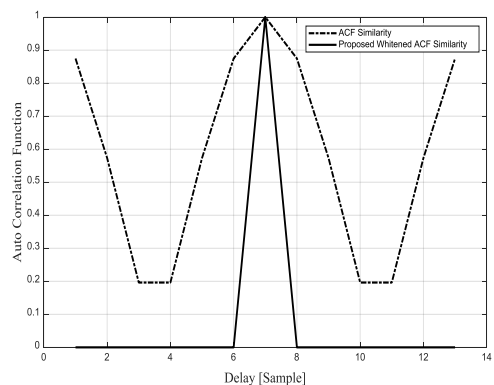
شکل (۱). مقایسه خصوصیات خود بستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد به ازای  $\rho = 0.1$  و ماتریس پس‌زمینه نمایی برای کد طول کوتاه



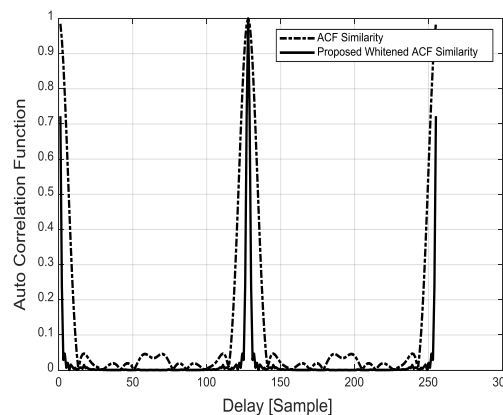
شکل (۵). مقایسه خصوصیات خود بستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد به ازای  $\rho = 0.1$  و ماتریس پس‌زمینه گوسی برای کد طول کوتاه



شکل (۲). مقایسه خصوصیات خود بستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد به ازای  $\rho = 0.8$  و ماتریس پس‌زمینه نمایی برای کد طول کوتاه

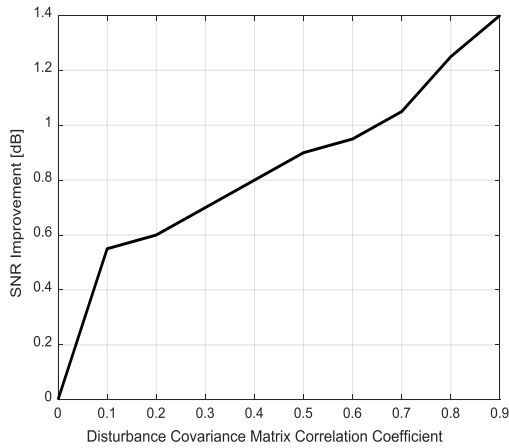


شکل (۶). مقایسه خصوصیات خود بستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد به ازای  $\rho = 0.8$  و ماتریس پس‌زمینه گوسی برای کد طول کوتاه



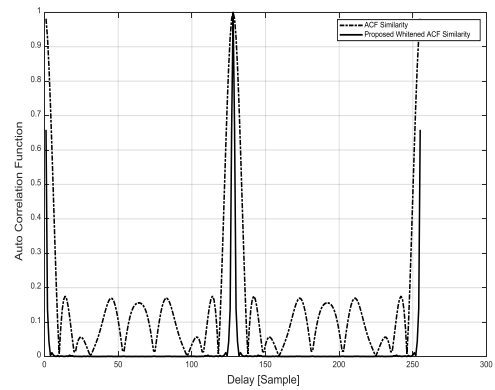
شکل (۳). مقایسه خصوصیات خود بستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد به ازای  $\rho = 0.1$  و ماتریس پس‌زمینه نمایی برای کد طول بلند



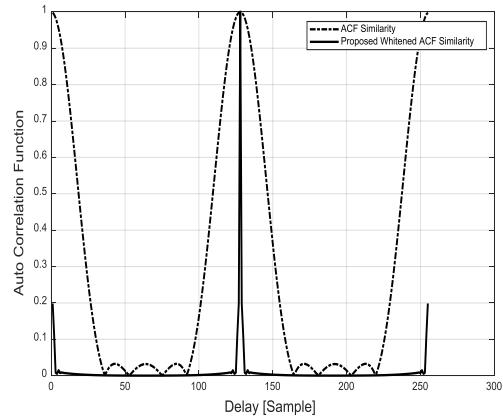


شکل (۱۰). بهبود حاصل از روش پیشنهادی در مقایسه با کد طراحی شده با قید شباهت کد برای ماتریس کواریانس نمایی

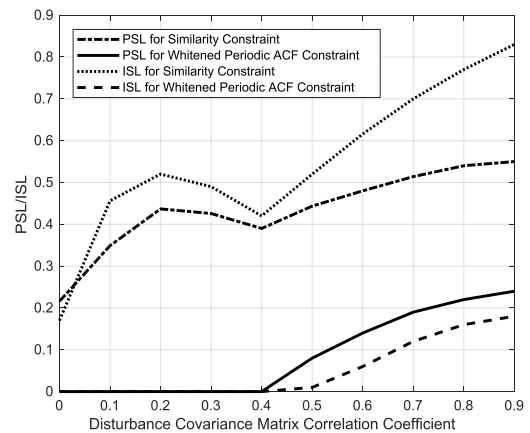
در نهایت در جدول (۲) مقایسه پیچیدگی محاسباتی استفاده از قید ACF سفید شده با قید ACF متعارف می‌پردازد. رایانه‌ای که این نتایج با آن به دست آمده است مجهز به یک ریزپردازنده Intel Core-i5-480M بوده است. همانگونه که در جدول مشاهده می‌شود، هیچگونه تفاوت معناداری بین پیچیدگی محاسباتی دو روش وجود ندارد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که قید پیشنهادی علی‌رغم بهبود عملکرد رادار، پیچیدگی محاسباتی WDP را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد.



شکل (۷). مقایسه خصوصیات خودبستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد به‌زای  $\rho = 0.1$  و ماتریس پس‌زمینه گوسی برای کد طول بلند



شکل (۸). مقایسه خصوصیات خودبستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد به‌زای  $\rho = 0.8$  و ماتریس پس‌زمینه گوسی برای کد طول بلند



شکل (۹). مقایسه خصوصیات خودبستگی کد طراحی شده با روش قید ACF متناوب سفید شده پیشنهادی با کد طراحی شده با قید شباهت کد برای ماتریس کواریانس نمایی

جدول (۲). مقایسه پیچیدگی محاسباتی طراحی کد با استفاده از قید ACF و قید ACF سفیدشده

Code Length	$\delta_a$	$\zeta$	$N_{ACF}$	$Time_{ACF}(s)$	$N_{WACF}$		$Time_{WACF}(s)$
					$Ol_0$	$l_i$	
۷	$10^{-6}$	۰,۹۹۹۴	۱۶	۰,۶۴۹۵	۳	۴	۰,۵۳۹۵
۱۳	$10^{-6}$	۰,۸۹۹۷	۱۸	۰,۷۵۰۹	۴	۵	۰,۷۰۴۶
۴۰	$10^{-6}$	۰,۶۲۳۹	۲۰	۰,۸۴۶۳	۴	۵	۰,۸۰۷۵
۸۰	۵۰۰۰	0.1	۲۲	۰,۹۱۰۹	۵	۵	۰,۸۸۶۲
۱۰۰	۶۱۶۵	۰,۰۰۱	۲۵	۱.0710	۶	۶	۱.1862
۱۲۴	۶۷۹۲	۰,۰۰۱	۲۵	۱.2613	۶	۷	۱.2416
۲۵۶	۷۲۹۳	۰,۰۰۱	۲۶	۱.8371	۶	۷	۱.9539

active sensing systems: a computational approach. Cambridge University Press, 2012.

- [8] N. Levanon, "Inter-pulse coding for ideal range response," presented at the Microwaves, Communications, Antennas and Electronic Systems, IEEE International Conference on, Tel-Aviv, Israel, 2008 .
- [9] A. De Maio, S. De Nicola, Y. Huang, S. Zhang, and A. Farina, "Code design to optimize radar detection performance under accuracy and similarity constraints," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 11, pp. 5618-5629, 2008.
- [10] A. De Maio, Y. Huang, and M. Piezzo, "A Doppler robust max-min approach to radar code design," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 58, no. 9, pp. 4943-4947, 2010.
- [11] A. De Maio, Y. Huang, M. Piezzo, S. Zhang, and A. Farina, "Design of optimized radar codes with a peak to average power ratio constraint," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 6, pp. 2683-2697, 2011.
- [12] G. Cui, H. Li, and M. Rangaswamy, "MIMO radar waveform design with constant modulus and similarity constraints," *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 62, no. 2, pp. 343-353, 2014.
- [13] P. Majdolashrafi, M. ArdebiliPour, and M. Ghasimi, "Radar code design to optimise detection under whitened similarity constraint," *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2020.
- [14] L. Zhongtao, H. Zishu, L. Kun, and C. Xuyuan, "Optimal receive filter design under similarity constraint in coloured noise," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 9, no. 7, pp. 888-899, 2015.
- [15] S. M. N. Karbasi, Mohammad Mehdi; Masjedi, Maryam ; Bastani, Mohammad Hassan, "Transmit Code Design for Detection of an Extended Target Embedded in Signal-Dependent Interference," *IHU Radar Journal*, vol. 6, no. 2, pp. 59-71, 2019 (In Persian).
- [16] Y. Jing, J. Liang, D. Zhou, and H. C. So, "Spectrally Constrained Unimodular Sequence Design without Spectral Level Mask," *IEEE Signal Processing Letters*, 2018.
- [17] W. Fan, J. Liang, G. Lu, X. Fan, and H. C. So, "Spectrally-agile waveform design for wideband MIMO radar transmit beampattern synthesis via majorization-ADMM," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021.

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله روشی جهت طراحی کد راداری بهینه از لحاظ آشکارسازی به همراه قیود تخمین پارامتر، تابع ابهام شکل موج رسانی و تغییرات توان ارائه شد. نشان دادیم که قید شباهت تابع خود بستگی سفید شده بسیار کاراتر از قید شباهت تابع خود بستگی هست. همچنین روش جریمه تدریجی برای حل مسئله بهینه‌سازی مطرح شده معرفی شد و در مورد همگرایی پیچیدگی محاسباتی روش پیشنهادی بحث شد و نشان داده شد که با افزایش قید مرتبه یک بودن ماتریس پاسخ مسئله بهینه‌سازی حاصل به تابع هدف به صورت تابع جریمه، در نهایت ماتریس پاسخ به دست آمده مرتبه یک بوده و پاسخ مسئله آزاد شده با مسئله اصلی یکسان خواهد بود. همچنین با شبیه‌سازی روش ارائه شده در محیط‌هایی با ماتریس کواریانس پس‌زمینه نمایی و گوسی، بهبود حاصل از روش پیشنهادی در سیگنال به نویز حاصل و تابع ابهام حاصل، نسبت به روش‌های معمول نشان داده شد.

## ۹- مراجع

- [1] G. Cui, A. DeMaio, A. Farina, and J. Li, *Radar Waveform Design Based on Optimization Theory*. SciTech Publishing, 2020.
- [2] S. Haykin, *Cognitive dynamic systems: perception-action cycle, radar and radio*. Cambridge University Press, 2012.
- [3] A. Farina, S. Haykin, and A. De Maio, *The impact of cognition on radar technology*. Institution of Engineering & Technology, 2017.
- [4] J. Guerci, *Cognitive Radar: The Knowledge-aided Fully Adaptive Approach* (Artech House radar library). Artech House, 2010.
- [5] F. Gini, A. De Maio, and L. Patton, *Waveform design and diversity for advanced radar systems*. Institution of engineering and technology London, 2012.
- [6] M. Wicks and E. Mokole, *Principles of waveform diversity and design*. The Institution of Engineering and Technology, 2011.
- [7] H. He, J. Li, and P. Stoica, *Waveform design for*

- and Software*, vol. 17, no. 6, pp. 1105-1154, 2002.
- [22] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical optimization*, second ed. Springer Science, theorem 173, 2006...
- [23] A. R. Conn, N. I. Gould, and P. L. Toint, *Trust region methods*. SIAM, 2000.
- [24] P. D. Tao, "The DC (difference of convex functions) programming and DCA revisited with DC models of real world nonconvex optimization problems," *Annals of operations research*, vol. 133, no. 4, pp. 23-46, 2005.
- [25] M. S. Handcock and M. L. Stein, "A Bayesian analysis of kriging," *Technometrics*, vol. 35, no. 4, pp. 403-410, 1993.
- [26] J. Song, P. Babu, and D. P. Palomar, "Sequence design to minimize the weighted integrated and peak sidelobe levels," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, no. 8, pp. 2051-2064, 2016.
- [18] M. M. Feraidooni, M. Alae-Kerahroodi, S. Imani, and D. Gharavian, "Designing Set of Binary Sequences and Space-Time Receive Filter for Moving Targets in Colocated MIMO Radar Systems," presented at the 20th International Radar Symposium (IRS), 2019 .
- [19] S. Shi, Z. He, and Z. Wang, "Joint design of transmitting waveforms and receiving filter for MIMO-STAP airborne radar," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 39, no. 3, pp. 1489-1508, 2020.
- [20] B. Tang, J. Tuck, and P. Stoica, "Polyphase waveform design for MIMO radar space time adaptive processing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 68, pp. 21-43, 2020.
- [21] J. F. Sturm, "Implementation of interior point methods for mixed semidefinite and second order cone optimization problems," *Optimization Methods*