

## بهبود جهت‌یابی منابع صدا در آرایه پسیو با استفاده از منبع مجازی مستقل

مهدی راهی<sup>۱</sup>، مرتضی شفیعی نیستانک<sup>۲\*</sup>، مجتبی ابوالقاسمی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکترا، ۲ و ۳- استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۱۲، پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۰۵)

### چکیده

روش‌های کلاسیک در پردازش آرایه عمدتاً بر بالابردن قابلیت تفکیک منابع نزدیک به هم در شرایط نویزی هنگامی که انتشار موج در محیط تخت باشد، متمرکز هستند. در بین روش‌های کلاسیک، الگوریتم دسته‌بندی سیگنال‌های چندگانه و اصلاح شده آن از بقیه مرسوم‌تر بوده و بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. در این مقاله یک روش آشکارسازی منابع صدا برای آرایه پسیو ارائه شده است. ابتدا الگوریتم دسته‌بندی سیگنال‌های چندگانه کلاسیک به صورت کاملی تشریح شده است. سپس بر اساس موارد اساسی که در این روش وجود دارد ایده پیشنهادی معرفی شده است. ایده، اضافه نمودن یک منبع مجازی با زاویه دلخواه که مستقل از منابع و نویز آن‌ها به داده‌های به دست آمده از سنسورها هست. این منبع مجازی مستقل از منابع و نویز آن‌ها در نظر گرفته شده است. اضافه نمودن این منبع با زاویه دلخواه مرتبه ماتریس کواریانس را یک واحد افزایش می‌دهد. با تغییر زاویه منبع مجازی هر جا زاویه آن با زاویه یکی از منابع اصلی هم‌راستا گردد، مرتبه ماتریس کواریانس از مقدار افزایش یافته به مقدار واقعی تقلیل می‌یابد. در انتها این ایده برای یک آرایه پنج عنصری پسیو برای دو مورد منابع مستقل و همدوس شبیه‌سازی شده است تا کیفیت آشکارسازی را نمایش دهد.

**کلیدواژه‌ها:** ماتریس کواریانس، فضای سیگنال، فضای نویز، مقدار ویژه.

### ۱- مقدمه

یکی از موضوعات تحقیقاتی در زمینه پردازش سیگنال‌های صوتی، مبحث جهت‌یابی منابع صوتی توسط حسگرهای آکوستیکی هست. تعیین تعداد نامشخص منابع از روی سیگنال‌های دریافتی، یک مسئله اساسی در پردازش سیگنال‌های آرایه‌ای است و این کار سبب بهبود کارایی روش تخمین جهت ورود سیگنال می‌شود [۱].

روش‌های کلاسیک در پردازش آرایه عمدتاً بر افزایش قابلیت تفکیک منابع نزدیک به هم در شرایط نویزی متمرکز هستند. در بین این روش‌ها، الگوریتم دسته‌بندی سیگنال‌های چندگانه<sup>۲</sup> [۲] [و اصلاح شده آن<sup>۳</sup>] [۳] از بقیه مرسوم‌تر بوده و بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. به طور کلی با افزایش سطح گیرندگی و باریک شدن نماد تشعشعی (آرایه خطی با تعداد حسگر زیاد) مشکلات و مسائل ذکر شده کاهش می‌یابند، اما محدودیت‌های موجود در ابعاد و مشکلات مربوط به نصب و تنظیم عناصر آرایه توجه محققین را به ابداع روش‌هایی سوق داده است که بتوان با کمترین حسگر دقت لازم را حاصل نمود. موارد جدیدی که امروزه در این زمینه مورد توجه قرار دارند آن‌ها را از آرایه‌های خطی کلاسیک متمایز نموده است. مدل‌سازی انتشار صوت در

محیط و تحلیل‌های عددی روشی کلی در برخورد با مسائلی از قبیل بیشتر بودن تعداد منابع از سنسورها [۴] [۵] آشکارسازی منابع با باند وسیع [۶][۷] [۸]، آشکارسازی همدوس منابع [۹] [اعوجاج فاز و دامنه در امواج دریافتی [۱۰] [۱۱] انتشار کروی موج و وابستگی تأخیر زمانی به فاصله [۱۲] هست که امروزه بیشتر مدنظر قرار دارد. در این روش‌ها با توجه به خواص محیطی و نحوه انتشار موج یک مدل ریاضی مناسب تعیین می‌گردد. پارامترهای این مدل در یک فرآیند تکراری و در جهت کاهش انرژی خطای بین خروجی مدل (سیگنال‌های عددی به دست آمده برای سنسورها) و ورودی آن (سیگنال‌های واقعی دریافتی از سنسورها) آن مقدار تغییر می‌کنند تا پس از همگرا شدن به مقادیر ثابتی بتوانند تعداد منابع صدا و جهت آن‌ها را تخمین زنند. زمان محاسبات در این روش‌ها نسبتاً زیاد است و معمولاً مدل بر اساس شرایط خاص محیطی طراحی می‌گردد تا از پیچیدگی آن کاسته شده و همگرایی سامانه سریع‌تر حاصل گردد. از دیگر گام‌های جدید در پردازش آرایه، دو ایده شبه آرایه<sup>۳</sup> و آرایه‌های تودرتو<sup>۴</sup> [۱۳] هستند که این ایده‌ها بر اساس خواص آرایه‌های خطی استوار هستند.

در این مقاله ابتدا اشاره کوتاهی به دو مبحث شبه آرایه و آرایه‌های تودرتو نموده و مفاهیم اولیه آن‌ها بیان شده است.

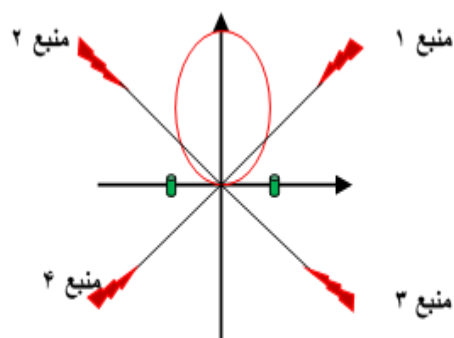
\* رایانامه نویسنده مسئول: Mshafiee@mut.ac.ir

<sup>3</sup> Co Array

<sup>4</sup> Nested Array

<sup>1</sup> MUSIC

<sup>2</sup> MMUSIC



شکل (۲). نمودار تشعشی آرایه ضرب شده در خودش

برداری که از آرایش ستون‌های ماتریس کواریانس به دست می‌آید به‌عنوان بردار سیگنال دریافتی وارد روش‌های معمول جهت‌یابی منابع صدا می‌گردد. به‌عنوان مثال برای آرایه‌ای سه عنصری و با دو منبع مستقل، تأخیر فاز در سیگنال‌های دریافتی شامل مجموعه  $\{\Psi_1, 2\Psi_1, \Psi_2, 2\Psi_2\}$  هستند.

#### ۲-۲- آرایه‌های تو در تو

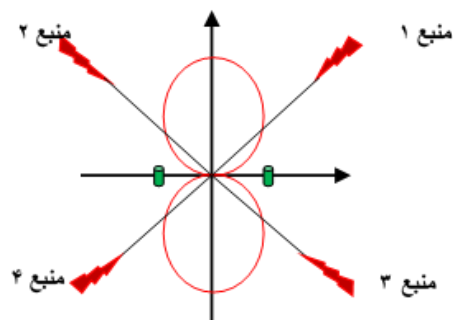
آرایه‌های تو در تو شامل دو آرایه (یکی سنسورهایی بافاصله نصف طول موج و دیگری بافاصله بیشتر) در کنار یکدیگر هستند. اگر نمودار تشعشی آن‌ها در یکدیگر ضرب شود بیم باریک‌تری در راستاهای اصلی به دست می‌آید. از آنجاکه نمودار تشعشی آرایه تبدیل فوریه سیگنال زمانی سنسورها است با کانولوشن گرفتن سیگنال‌های دریافتی از دو آرایه و پردازش سیگنال‌های جدید بیم باریک‌تر شده و دقت آشکارسازی بالا می‌رود. این مفهوم در شکل (۳) نشان داده شده است. فاصله بین سنسورها در آرایه دوم باید به شیوه مناسبی انتخاب گردد تا لوب‌های فرعی قابل ملاحظه نگردند.

سیگنال‌های به‌دست آمده از عمل کانولوشن سپس وارد فرآیند شبه آرایه می‌گردند. مهم‌ترین مزیت این آرایه‌ها تولید بیم باریک با استفاده از تعداد کمتری سنسور در مقایسه با آرایه‌های خطی کلاسیک هست که مسائل و مشکلات نصب و تنظیم سنسورها را کاهش می‌دهد. آرایه نمایش داده شده در شکل (۳) را آرایه تودرتوی دوسطحی می‌نامند. این روش می‌تواند برای سطوح دلخواهی از ترکیب آرایه‌ها پیاده گردد. در نتیجه استفاده از فرآیند شبه آرایه در آرایه‌های تودرتو می‌تواند با کمترین تعداد سنسور دقت قابل ملاحظه‌ای در آشکارسازی و تفکیک منابع ایجاد نماید.

سپس روش MUSIC کلاسیک به‌صورت کامل تشریح شده است. در پایان بر اساس موارد اساسی که در روش MUSIC وجود دارد ایده پیشنهادی‌مان را معرفی کرده و آن را اثبات می‌کنیم. این ایده برای یک آرایه چهارعنصری پسو شبیه‌سازی و تحلیل شده است.

#### ۲- شبه آرایه و آرایه‌های تودرتو ۱-۲- شبه آرایه

مطابق با شکل (۱) اگر در یک آرایه خطی دو عنصری با فاصله نصف طول موج بیم شروع به چرخش کند، هنگامی که بیم زاویه منبع ۱ یا ۴ قرار گیرد حاصل جمع سیگنال دو منبع را دریافت کرده و در نتیجه نمی‌تواند این دو منبع را از یکدیگر تفکیک نماید. این پدیده برای منابع ۲ و ۳ نیز اتفاق می‌افتد. بنابراین یک آرایه خطی دو عنصری تنها می‌تواند دو منبع را آشکار کند.



شکل (۱). نمودار تشعشی آرایه خطی

این ویژگی به دلیل وجود نماد تشعشی متقارنی است که آرایه حول مرکز دارد. حال اگر بتوانیم بیم آرایه را در خودش ضرب نماییم (معادل کانولوشن کردن سیگنال‌ها با خودشان)، نمودار تشعشی آن به‌صورت شکل (۲) خواهد شد که در این حالت می‌تواند چهار منبع را از یکدیگر تفکیک نماید. در روش‌های کلاسیکی که از ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی استفاده می‌کنند کانولوشن (ضرب شدگی) در این ماتریس اتفاق می‌افتد. در فضای سیگنال تنها تأخیر زمانی سنسورهای آرایه با علامت مثبت نسبت به سنسور مرجع وجود دارد، درحالی‌که این تأخیرها در ماتریس کواریانس با علامت منفی نیز ظاهر می‌گردند و معادل این است که تعداد سنسورها دوبرابر شده و سنسور وسط مرجع قرار گرفته است. در واقع با این عمل (ضرب شدگی در ماتریس کواریانس) سیستم پردازش از فضای مرتبه اول (سیگنال) به فضای مرتبه دوم (انرژی) انتقال می‌یابد و معادل این است که بیم آرایه به توان دوم رسیده و یک‌طرفه و باریک‌تر می‌شود. این ایده اساس کار آرایه‌های موسوم به شبه آرایه هست.

مطابق با شکل ۴ اگر یک منبع سینوسی در فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  با پوش  $a(t)$  در فاصله  $r$  از آرایه قرار داشته باشد (نسبتاً دور بطوری که موج تخت گردد)  $x_1(t)$  جبهه اولیه موج دریافتی (که به اندازه  $10 * \log(\frac{r_2}{r_1})$  تضعیف و به میزان  $\frac{r}{c}$  به تاخیر می‌افتد) توسط المان اول (که معمولاً مرجع در نظر گرفته می‌شود) به صورت زیر است:

$$x_1(t) = \frac{1}{r} a\left(t - \frac{r}{c}\right) e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} + n_1(t) \quad (1)$$

که در آن سیگنال لحظه‌ای نویز المان اول می‌باشد. این موج با تاخیر  $\frac{\Delta r}{c}$  ثانیه در المان دوم دریافت می‌گردد.

$$x_2(t) = \frac{1}{r} a\left(t - \frac{r + \Delta r}{c}\right) e^{j\omega\left(t - \frac{r + \Delta r}{c}\right)} + n_2(t) \quad (2)$$

تأخیر  $\frac{\Delta r}{c}$  در سیگنال پوش  $a(t)$  قابل ملاحظه نیست زیرا پهنای باند  $a(t)$  در مقایسه با فرکانس حامل بسیار کم است و در مدت زمان پردازش تغییر زیادی نمی‌کند. بنابراین

$$\frac{1}{r} a\left(t - \frac{r + \Delta r}{c}\right) \approx \frac{1}{r} a\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (3)$$

این ترم برای همه المان‌ها ثابت است و آن را با  $z(t)$  نمایش می‌دهیم. باتوجه به اینکه

$$\Delta r = d \sin(\theta) \quad (4)$$

خواهیم داشت

$$e^{j\omega\left(t - \frac{r + \Delta r}{c}\right)} = e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} e^{j\omega\left(\frac{d \sin(\theta)}{c}\right)} \quad (5)$$

$$= e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} e^{j\psi}$$

که در آن

$$\psi = \omega \frac{d \sin(\theta)}{c} = \frac{2\pi c \lambda \sin(\theta)}{\lambda \cdot 2 \cdot c} = \pi \sin(\theta) \quad (6)$$

بدین ترتیب موج دریافتی در المان دوم به صورت زیر است

$$x_2(t) = z(t) e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} e^{j\psi} + n_2(t) \quad (7)$$

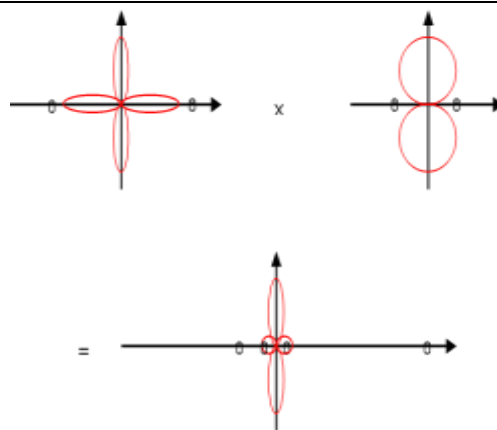
به همین ترتیب در المان سوم داریم

$$x_3(t) = z(t) e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} e^{j2\psi} + n_3(t) \quad (8)$$

حال می‌توان مدل ریاضی آرایه را برای یک منبع صدا که آن را با  $Z_1(t)$  نمایش می‌دهیم به صورت زیر نوشت

$$x_1(t) = z_1(t) e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} + n_1(t) \quad (9)$$

$$x_2(t) = z_1(t) e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} e^{j\psi} + n_2(t)$$

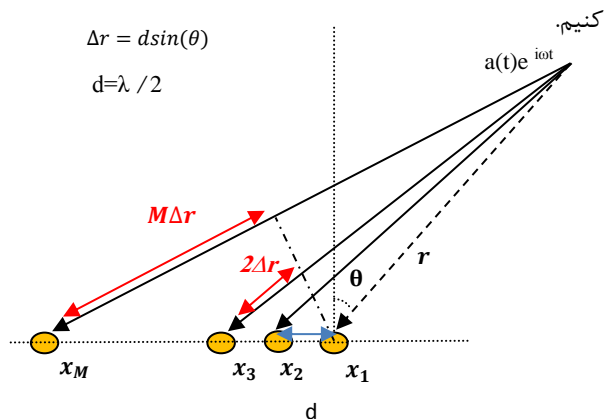


شکل (۳). نمودار تشعشعی آرایه تودرتو که از حاصل ضرب دو آرایه خطی به دست می‌آید

### ۳- روش دسته‌بندی سیگنال‌های چندگانه

در روش‌های آشکارسازی کلاسیک بادقت بالا که برای محیط‌های نسبتاً ایده‌آل ارائه شده‌اند پنج فرض اساسی همواره در نظر گرفته شده‌اند: مستقل بودن منابع از یکدیگر، کمتر بودن تعداد آن‌ها از تعداد سنسورهای آرایه، ثابت بودن مکان منابع و در نتیجه ثابت بودن دامنه سیگنال پوش موج در هنگام نمونه‌برداری از المان‌ها، مستقل بودن نویز (نویز گوسی با متوسط صفر) از منابع صدا و مستقل بودن نویز المان‌ها از یکدیگر. یکی از الگوریتم‌های مطرح در این زمینه MUSIC هست. در این بررسی ابتدا اصول و قواعد اساسی در این روش را تحلیل می‌کنیم.

روش MUSIC یک روش دسته‌بندی سیگنال‌های چندتایی بر پایه استخراج اطلاعات از فضای تهی ماتریس کواریانس است. این روش را به طور خلاصه برای یک آرایه  $M$  عنصری بافاصله نصف طول موج و با تعداد  $P$  منبع مستقل صدا با فرض اینکه تعداد منابع از تعداد المان‌های آرایه کمتر باشد  $P \leq M$  بررسی می‌کنیم.



شکل (۴). آرایه با  $M$  المان و با فاصله  $d$

آید. زیرماتریس  $Z_{P \times 1} Z_{1 \times P}^T$  را بر اساس اجزای آن دوباره نویسی می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} \\ \vdots \\ z_p(t) e^{j\omega(t-\frac{r_p}{c})} \end{pmatrix}_{P \times 1} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} z_1(t) e^{-j\omega(t-\frac{r_1}{c})} & \dots & z_p(t) e^{-j\omega(t-\frac{r_p}{c})} \end{pmatrix}_{1 \times P}$$

با متوسط‌گیری از آن داریم

$$\begin{pmatrix} \langle |z_1(t)|^2 \rangle & \dots & \langle z_1(t) z_p(t)^* \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle z_p(t) z_1(t)^* \rangle & \dots & \langle |z_p(t)|^2 \rangle \end{pmatrix}_{P \times P} \quad (16)$$

این ماتریس بر اساس فرض اول به‌صورت زیر خواهد بود

$$\begin{pmatrix} \langle |z_1(t)|^2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \langle |z_p(t)|^2 \rangle \end{pmatrix}_{P \times P} \quad (17)$$

که ماتریسی قطری حاوی انرژی منابع صدا است. همچنین برای نویز داریم

$$\begin{pmatrix} \langle |n_1(t)|^2 \rangle & \dots & \langle n_1(t) n_p(t)^* \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle n_p(t) n_1(t)^* \rangle & \dots & \langle |n_p(t)|^2 \rangle \end{pmatrix}_{(M-P) \times (M-P)} \quad (18)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix}_{(M-P) \times (M-P)}$$

باتوجه به این تحلیل، عناصر قطری ماتریس کواریانس به دو قسمت تقسیم می‌گردند. به تعداد منابع (P) مقادیر قطری حاوی مجموع انرژی منابع و واریانس نویز و به تعداد (M-P) فقط حاوی واریانس نویز هستند. بدین ترتیب مجموع انرژی منابع و نویز در فضای اصلی ماتریس کواریانس قرار دارد و فضای تهی آن فقط متأثر از واریانس نویز است. زاویه منابع ترکیب خطی از بردارهای ویژه زیر فضای سیگنال است و بر زیر فضای نویز عمود هستند. باتوجه به تعامد این دو زیر فضا روش جستجوی زاویه در روش MUSIC به دست می‌آید. یعنی منابع صدا در راستایی قرار می‌گیرند که کمترین تصویر روی زیر فضای نویز ماتریس کواریانس دارد. برای تحقق‌پذیری این اصل در روش MUSIC مراحل زیر صورت می‌پذیرد.

۱- به تعداد Q مرتبه با نرخ نمونه‌برداری مناسب (حداقل دو برابر فرکانس کار آرایه) از سیگنال‌های مانده داده‌برداری می‌گردد و بدین ترتیب Q بردار X به دست می‌آید.

۲- برای هر بردار X ماتریس کواریانس آن محاسبه شده و با متوسط‌گیری از آن‌ها ماتریس کواریانس کل به دست می‌آید.

$$x_3(t) = z_1(t) e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} e^{j2\psi} + n_3(t)$$

$$x_M(t) = z_1(t) e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} e^{j(M-1)\psi} + n_M(t)$$

در نهایت با در نظر گرفتن حالت کلی با تعداد P منبع مستقل مدل سیستم به‌صورت زیر است

$$x_1(t) = z_1(t) e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} + \dots + \quad (10)$$

$$z_p(t) e^{j\omega(t-\frac{r_p}{c})} + n_1(t)$$

$$x_2(t) = z_1(t) e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} e^{j\psi_1} + \dots +$$

$$z_p(t) e^{j\omega(t-\frac{r_p}{c})} e^{j\psi_p} + n_2(t)$$

$$x_3(t) = z_1(t) e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} e^{j2\psi_1} + \dots +$$

$$z_p(t) e^{j\omega(t-\frac{r_p}{c})} e^{j2\psi_p} + n_3(t)$$

$$x_M(t) = z_1(t) e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} e^{j(M-1)\psi_1} + \dots +$$

$$z_p(t) e^{j\omega(t-\frac{r_p}{c})} e^{j(M-1)\psi_p} + n_M(t)$$

و در فرم ماتریسی به‌صورت فشرده می‌توان نوشت

$$X_{M \times 1} = \Psi_{M \times P} Z_{P \times 1} + N_{M \times 1} \quad (11)$$

در این روش بر اساس فرض سوم Q بار تعداد مشخصی نمونه از سیگنال‌های مانده آرایه برداشته شده و بدین ترتیب Q بردار  $X_{M \times 1}$  به دست می‌آید. سپس با ضرب هر بردار در ترانزپوز خود و متوسط‌گیری از ماتریس‌های حاصل ماتریس کواریانس محاسبه می‌گردد.

$$R_{M \times M} = \langle X_{M \times 1} X_{1 \times M}^T \rangle_Q \quad (12)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^Q (X_{M \times 1})_i (X_{1 \times M}^T)_i}{Q}$$

ماتریس کواریانس را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$R_{M \times M} = \langle (\Psi_{M \times P} Z_{P \times 1} + N_{M \times 1}) \quad (13)$$

$$(Z_{1 \times P}^T \Psi_{P \times M}^T + N_{1 \times M}^T) \rangle_Q$$

بر اساس فرض چهارم یعنی مستقل بودن نویز از منابع صدا برای ماتریس کواریانس خواهیم داشت

$$R_{M \times M} = \langle \Psi_{M \times P} Z_{P \times 1} Z_{1 \times P}^T \Psi_{P \times M}^T \rangle_Q + \langle N_{M \times 1} N_{1 \times M}^T \rangle_Q \quad (14)$$

زیر ماتریس  $Z_{P \times 1} Z_{1 \times P}^T$  که در ماتریس کواریانس قرار دارد از مرتبه P یعنی تعداد منابع صدا می‌باشد. در نتیجه (باتوجه به فرض دوم) مرتبه ماتریس کواریانس نیز P است. بنابراین تعداد منابع مستقل با محاسبه مرتبه ماتریس کواریانس به دست می‌-

$$\begin{pmatrix} |z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 \\ |z_1(t)|^2 e^{j\psi_1} + |z_2(t)|^2 e^{j\psi_2} \\ |z_1(t)|^2 e^{2j\psi_1} + |z_2(t)|^2 e^{2j\psi_2} \\ |z_1(t)|^2 e^{-j\psi_1} + |z_2(t)|^2 e^{-j\psi_2} \\ |z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 \\ |z_1(t)|^2 e^{j\psi_1} + |z_2(t)|^2 e^{j\psi_2} \\ |z_1(t)|^2 e^{-2j\psi_1} + |z_2(t)|^2 e^{-2j\psi_2} \\ |z_1(t)|^2 e^{-j\psi_1} + |z_2(t)|^2 e^{-j\psi_2} \\ |z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad (20)$$

مرتبه ماتریس در این حالت دو هست. اگر دو منبع مستقل صدا هم راستا گردند ( $\Psi_1 = \Psi_2$ )، ماتریس کواریانس به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$|z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 \begin{pmatrix} 1 & e^{-j\psi_1} & e^{-2j\psi_1} \\ e^{j\psi_1} & 1 & e^{-j\psi_1} \\ e^{2j\psi_1} & e^{j\psi_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

طوریکه ملاحظه می‌شود سطر اول ماتریس ترکیب خطی از سطرهای دیگر می‌گردد و مرتبه از مقدار دو به یک سقوط می‌کند. این مسئله می‌تواند به حالت کلی تعمیم یابد. پوش سیگنال اضافه شده به مدل باید از هر نوع منبع مفروض مستقل باشد، بنابراین تابع اضافه‌شده به مدل سیستم یک سیگنال تصادفی با متوسط صفر و در زاویه متغیر انتخاب می‌گردد. بدین ترتیب مدل سیستم پس از نمونه‌برداری و اضافه‌کردن سیگنال تصادفی کمکی به صورت زیر است

$$r(t) = rand(\cdot) \quad (22)$$

$$x_1(t) = z_1(t)e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} + \dots + z_P(t)e^{j\omega(t-\frac{r_P}{c})} + r(t) + n_1(t)$$

$$x_2(t) = z_1(t)e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})}e^{j\psi_1} + \dots + z_P(t)e^{j\omega(t-\frac{r_P}{c})}e^{j\psi_P} + r(t)e^{j\gamma} + n_2(t)$$

$$x_M(t) = z_1(t)e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})}e^{j(M-1)\psi_1} + \dots + z_P(t)e^{j\omega(t-\frac{r_P}{c})}e^{j(M-1)\psi_P} + r(t)e^{(M-1)j\gamma} + n_M(t)$$

با تغییر  $\gamma$  از صفر تا  $180^\circ$  درجه زوایایی که در آنها مرتبه یک واحد کم می‌گردد زاویه منابع صدا خواهند بود. با اضافه‌شدن منبع مجازی به ساختار آرایه وقتی این منبع در راستای منابع اصلی نیست یکی از بردارهای ویژه فضای نویز (تهی) ماتریس کواریانس به فضای سیگنال جهش می‌کند و در نتیجه مرتبه ماتریس یک واحد افزایش می‌یابد. با هم راستا شدن منبع مجازی با یکی از منابع اصلی این بردار به فضای نویز باز می‌گردد.

۳- بر اساس محاسبه تعداد مقادیر ویژه‌ای که از یک آستانه تعریف شده بیشتر باشند مرتبه ماتریس کواریانس محاسبه می‌گردد تا تعداد منابع مستقل به دست آید.

۴- بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه کمتر از آستانه محاسبه شده و زیر فضای تهی (ماتریس تهی) تشکیل می‌گردد.

۵- بردار جستجو را در زیر فضای انرژی ماتریس تهی تصویر می‌نماییم. از آنجاکه زیر فضای منابع بر فضای تهی تعامد دارد تصویر فوق در راستای منابع صدا مینیمم می‌شود.

ایده اساسی در MUSIC این است که جستجو در زیر فضای تهی (نویز) ماتریس کواریانس به صورت حساس‌تری محل منابع را آشکار کرده و قدرت تفکیک بالاتری در یافتن منابع نزدیک به یکدیگر ارائه می‌دهد. مهم‌ترین مسئله در روش MUSIC تشخیص مرتبه است. وقتی دامنه نویز زیاد و دامنه منابع کم باشد اندازه مرتبه به دست آمده دستخوش یک واحد خطا می‌گردد. در واقع مرز بین دو زیر فضای سیگنال و نویز از قطعیت خارج می‌شود طوریکه یکی از بردارهای ویژه به طور تصادفی بین این دو زیر فضا جابه‌جا می‌گردد. از آنجاکه بردار زاویه هر منبع صدا ترکیب خطی از بردارهای ویژه در زیر فضای سیگنال ماتریس کواریانس است، نویز مکان‌یابی منابع را نیز متأثر می‌کند.

#### ۴- روش پیشنهادی

ایده اصلی در این تحقیق این است که با اضافه نمودن یک منبع مجازی قوی، مرتبه ماتریس کواریانس یک واحد افزایش یافته و وقتی این منبع هم‌راستا با یکی از منابع واقعی شود مرتبه با وضوح بیشتری به مقدار اصلی تقلیل می‌یابد؛ بنابراین زوایایی که مرتبه در آنها یک واحد تغییر دارد منابع اصلی را ارائه می‌دهند. براین اساس در ماتریس کواریانس، پدیده هم‌راستا شدن دو منبع مستقل بررسی شده و از نتیجه آن در مسئله آشکارسازی زاویه استفاده می‌کنیم. در یک آرایه سه عنصری با دو منبع مستقل و دو زاویه مجزا مدل به صورت زیر است.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\psi_1} & e^{j\psi_2} \\ e^{j2\psi_1} & e^{j2\psi_2} \end{pmatrix}_{3 \times 2} \begin{pmatrix} z_1(t)e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})} \\ z_2(t)e^{j\omega(t-\frac{r_2}{c})} \end{pmatrix}_{2 \times 1} + \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \quad (19)$$

و ماتریس کواریانس به صورت زیر خواهد بود

و ماتریس کواریانس پس از متوسط‌گیری رابطه زیر خواهد بود.

$$\langle \begin{pmatrix} Y_1(t) Y_1(t)^* & Y_1(t) \alpha Y_1(t-\tau)^* \\ \alpha Y_1(t-\tau) Y_1(t)^* & \alpha Y_1(t-\tau) \alpha Y_1(t-\tau)^* \end{pmatrix} \rangle_Q = \frac{1}{Q} \begin{pmatrix} Y_1(t_1) Y_1(t_1)^* + \dots + Y_1(t_Q) Y_1(t_Q)^* \\ \alpha Y_1(t_1-\tau) Y_1(t_1)^* + \dots + \alpha Y_1(t_Q-\tau) Y_1(t_Q)^* \\ Y_1(t_1) \alpha Y_1(t_1-\tau)^* + \dots + Y_1(t_Q) \alpha Y_1(t_Q-\tau)^* \\ \alpha Y_1(t_1-\tau) \alpha Y_1(t_1-\tau)^* + \dots + \alpha Y_1(t_Q-\tau) \alpha Y_1(t_Q-\tau)^* \end{pmatrix} \quad (30)$$

با انجام عمل متوسط‌گیری این امکان به وجود می‌آید که علی‌رغم همدوس بودن  $Y_1$  و  $Y_2$  ولی به دلیل عدم هم‌زمانی آن‌ها رتبه ماتریس کواریانس حاصل شده روی مقدار ۲ باقی بماند. اگر  $\tau = 0$  باشد دو المان ستون اول ضریبی از یکدیگر می‌گردند و رتبه ماتریس ۱ است. اما از آنجا که برای منابع همدوس  $\tau > 0$  می‌باشد، ستون اول ماتریس می‌تواند در راستای ستون دوم نباشد. هرچه تاخیر زمانی بیشتر باشد راستای دو ستون از یکدیگر دورتر شده و تشخیص رتبه با دقت بیشتری صورت می‌پذیرد. واریانس نویز سنسورها که در ماتریس کواریانس با المان‌های آن جمع می‌گردد در صورتی که متفاوت باشند ممکن است رتبه ماتریس را تغییر دهند. در نتیجه در شرایط نویزی شدید آشکارسازی منابع همدوس را مشکل‌تر می‌کنند.

با این تحلیل که نتایج شبیه‌سازی آن را تأیید می‌کند می‌توان بیان نمود که در صورت محدود بودن تعداد زوایای موج مربوط به یک منبع (کوچک‌تر از تعداد سنسورها) ماتریس کواریانس می‌تواند در صورتی که نویز شدیدی وجود نداشته باشد زوایای دریافتی آرایه را تخمین بزند. از آنجا که تعداد منابع انعکاس‌دهنده موج در محیط‌های ناشناخته مشابه آب‌های کم‌عمق نامحدود و غیرقابل پیش‌بینی است در نتیجه اگر تعداد منابع همدوس از تعداد سنسورهای آرایه بیشتر گردد آشکارسازی زوایای آن‌ها را عملاً غیرممکن می‌سازد؛ بنابراین بزرگ‌ترین مشکل در این زمینه تعداد محدود سنسورها در آرایه است که کارایی آن را در عمل محدود می‌کند.

## ۶- نتایج شبیه‌سازی و تحلیل

الگوریتم پیشنهادی برای یک آرایه ۵ عنصری  $\frac{\lambda}{2}$  و با سه منبع که می‌توان آن‌ها را مستقل یا همدوس فرض نمود، شبیه‌سازی شده است. در این کار شبیه‌سازی به گونه‌ای انجام شده است که بتوان منابع دوم و سوم را به دلخواه و با تاخیر قابل تنظیم با منبع اول همدوس نمود. مراحل شبیه‌سازی به صورت زیر می‌باشد.

۱- سه زاویه برای سه منبع در نظر گرفته می‌شود (teta\_3, teta\_2, teta\_1).

۲- در حلقه تکرار (معادل با یک ثانیه) سیگنال‌های سه منبع (سه سیگنال تصادفی با دامنه ۰,۵) با توجه به زاویه آن‌ها ساخته می‌شوند (z3, z2, z1).

## ۵- بررسی منابع همدوس

به دلیل انعکاس موج در محیط انتشار، این امکان وجود دارد که موج مربوط به یک منبع از چند زاویه مختلف توسط آرایه دریافت گردد. این پدیده را می‌توان به این صورت تعبیر نمود که چند منبع همدوس در محیط وجود دارد. جهت بررسی این پدیده مدل سیستم را برای حالتی ساده شامل دو منبع نظر می‌گیریم.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\psi_1} & e^{j\psi_2} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}_{2 \times 1} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}_{2 \times 1} \quad (23)$$

که در آن

$$Y_1(t) = z_1 \left( t - \frac{r_1}{c} \right) e^{j\omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right)} \quad (24)$$

$$Y_2(t) = z_2 \left( t - \frac{r_2}{c} \right) e^{j\omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right)}$$

قسمت اصلی ماتریس کواریانس به صورت کلی زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\psi_1} & e^{j\psi_2} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}_{2 \times 1} \quad (25)$$

$$(Y_1(t)^* \ Y_2(t)^*)_{1 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-j\psi_1} & e^{-j\psi_2} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

اگر موج مربوط به یک منبع با دو زاویه متفاوت دریافت گردد نشان‌دهنده این است که آن دو موج با یکدیگر اختلاف مسیر دارند. در نتیجه اگر  $Z_1$  منبع اصلی باشد لزوماً شرط زیر برقرار می‌باشد.

$$r_2 > r_1 \quad (26)$$

این شرط در صورتی است که  $Y_2(t)$  به صورت زیر باشد.

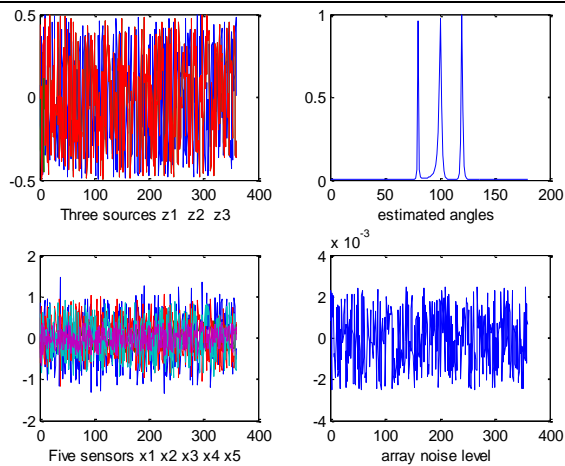
$$Y_2(t) = \alpha Y_1(t - \tau) \quad (27)$$

که در آن

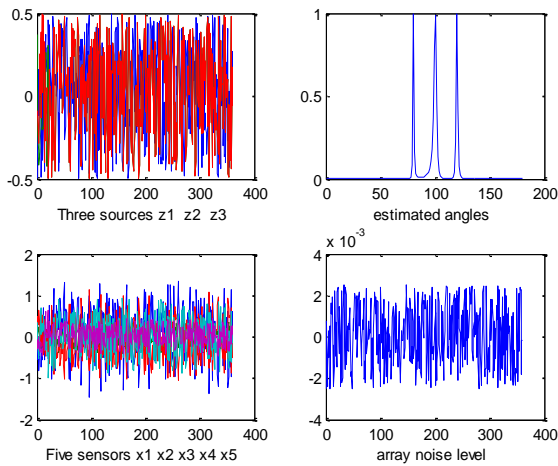
$$\tau = \frac{r_2 - r_1}{c} = \frac{\Delta r}{c} \quad (28)$$

اختلاف زمانی بین رسیدن سیگنال‌ها به آرایه است. با جای‌گذاری این رابطه در ماتریس کواریانس قسمت میانی آن به صورت زیر خواهد شد.

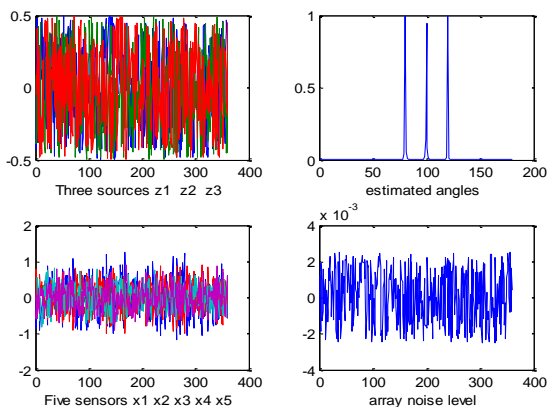
$$\begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \alpha Y_1(t - \tau) \end{pmatrix}_{2 \times 1} (Y_1(t)^* \ \alpha Y_1(t - \tau)^*)_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} Y_1(t) Y_1(t)^* & Y_1(t) \alpha Y_1(t - \tau)^* \\ \alpha Y_1(t - \tau) Y_1(t)^* & \alpha Y_1(t - \tau) \alpha Y_1(t - \tau)^* \end{pmatrix} \quad (29)$$



شکل (۶). منبع اصلی در زاویه ۸۰ و دو منبع همدوس با آن در زاویه ۱۰۰ و ۱۲۰، تاخیر زمانی معادل ۰,۰۲۵ ثانیه (اختلاف فاصله تقریبی ۱۰ متر در آب بین منبع اصلی و انعکاس)، سطح نویز ۰,۰۰۵



شکل (۷). منبع اصلی در زاویه ۸۰ و دو منبع همدوس با آن در زاویه ۱۰۰ و ۱۲۰، تاخیر زمانی معادل ۰,۰۵ ثانیه، سطح نویز ۰,۰۰۵



شکل (۸). دو منبع مستقل در زاویه ۸۰ و ۱۲۰، یک منبع همدوس با منبع اول در زاویه ۱۰۰، تاخیر زمانی معادل ۰,۰۵ ثانیه، سطح نویز ۰,۰۰۵

۳- منبع اول مستقل و وضعیت همدوس بودن دو منبع دیگر نسبت به آن (بر حسب میلی ثانیه) تعیین می‌گردد. (delay\_time)

۴- از ترکیب سیگنال منابع سیگنال دریافتی توسط پنج سنسور آرایه به دست می‌آید. (x5,x4,x3,x2,x1)

۵- سطح نویز تعیین شده (noise\_level) و به سنسورها اضافه می‌گردد.

۶- ماتریس کواریانس (R) تشکیل و مقدار ویژه مینیمم آن محاسبه می‌گردد ( $\lambda_{0min}$ ).

۷- در حلقه تکرار از یک تا ۱۸۰ درجه، سیگنال کمکی  $y$  (سیگنال تصادفی با دامنه ۰,۵) به سنسورها اضافه شده و برای هر بار ماتریس کواریانس تشکیل می‌گردد. سپس با به دست آوردن مقدار ویژه مینیمم آن ( $\lambda_{1min}$ ) از رابطه زیر

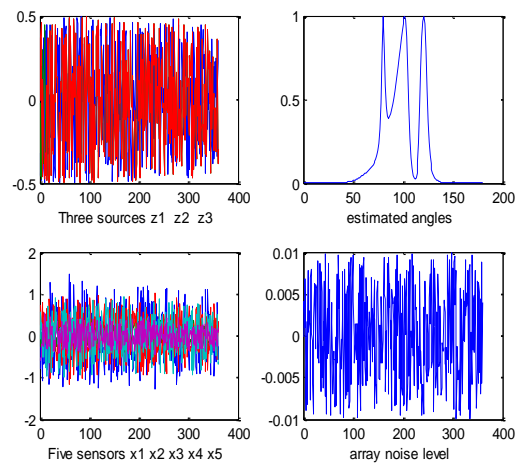
$$J = \frac{1}{abs(\alpha + \lambda_{1min} - \lambda_{0min})} \quad (31)$$

$J$  محاسبه و در بردار  $n$  قرار داده می‌شود ( $\alpha$  عدد کوچکی بوده و برای جلوگیری از پدیده تقسیم بر صفر استفاده شده است).

۸- پس از اتمام حلقه، بردار  $n$  نرمالیزه شده و ترسیم می‌گردد. نقاط پیک منحنی رسم شده زاویه منابع را ارائه می‌دهد.

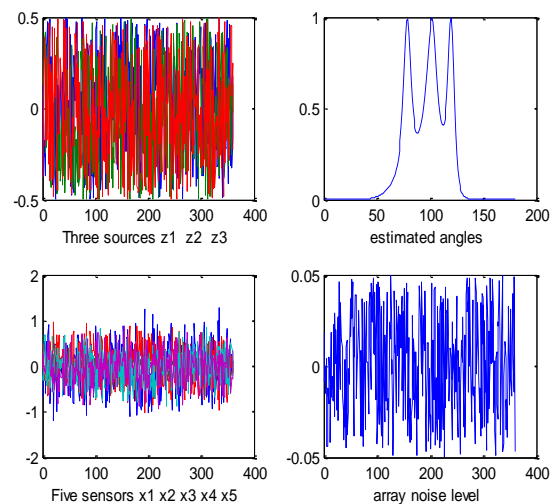
سطح نویز و میزان تأخیر زمانی منابع همدوس با منبع اصلی، دو پارامتری هستند که بر کیفیت آشکارسازی تأثیر قابل ملاحظه‌ای دارند.

چند نمونه از نتایج شبیه‌سازی در شرایط مختلف در اشکال ۵ تا ۹ آورده شده است.



شکل (۹). منبع اصلی در زاویه ۸۰ و دو منبع همدوس با آن در زاویه ۱۰۰ و ۱۲۰، تاخیر زمانی معادل ۰,۰۲۵ ثانیه (اختلاف فاصله تقریبی ۱۰ متر در آب بین منبع اصلی و انعکاس)، سطح نویز ۰,۰۲

- Low-Complexity Setup for DOA Estimation of Coherent Signals of Unknown Sources Located at Endfire Angles," Journal of "Radar", Vol. 4, No. 1, 2016 (Serial No. 11), (In Persian).
- [2] G. A. Ioannopoulos; D. E. Anagnostou; M. T. Chryssomallis, " A Survey on the Effect of Small Snapshots Number and SNR on the Efficiency of the MUSIC Algorithm," Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation.
- [3] Andrew L. Kintz, Inder J. Gupta, " A Modified MUSIC Algorithm for Direction of Arrival Estimation in the Presence of Antenna Array Manifold Mismatch," IEEE Transactions on Antennas and Propagation (Volume: 64, Issue: 11, Nov. 2016).
- [4] Shumei Zhang, Ammar Ahmed, Yimin D. Zhang, and Shunqiao Sun, "Enhanced DOA Estimation Exploiting Multi-Frequency Sparse Array," IEEE Transactions on Signal Processing (Volume:69),Page(s):5935-5946, 2021.
- [5] W.K Ma, T.H. Hsieh, and C.-Y. Chi, "DOA Estimation of Quasi-Stationary Signals with Less Sensors than Sources and Unknown Spatial Noise Covariance: a Khatri-Rao Subspace Approach," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 58, no. 4, pp. 2168-2180, 2010.
- [6] Hui Xia, " MVDR Algorithm for Broadband Coherent Source Signals Based on Data Reconstruction," 2020 IEEE International Conference on Power, Intelligent Computing and Systems (ICPICS).
- [7] E. D. Di Claudio and R. Parisi, "WAVES: Weighted Average of Signal Subspaces for Robust Wideband Direction Finding," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, no. 10, pp. 2179-2191, 2001.
- [8] Milad Javadzadeh Jirhandeh, Hooman Hezaveh, and Mohammad Hossein Kahaei, "Super-Resolution DOA Estimation for Wideband Signals Using Non-Uniform Linear Arrays with No Focusing Matrix," IEEE Wireless Communications Letters, Volume 11, March 2022.
- [9] J. Cai, D. Bao, and P. Li, "DOA Estimation via Sparse Recovering from the Smoothed Covariance Vector," Journal of Systems Engineering and Electronics, vol. 27, no. 3, pp. 555-561, 2016.
- [10] W. Wand, Q. Zhang, W. Shi and J. SHI, " Iterative Sparse Covariance Matrix Fitting Direction of Arrival Estimation Method Based on Vector Hydrophone Array ", Journal of Northwestern Poly technical University 38(1):14-23, 2019.
- [11] L. A. Chernov, Wave Propagation in a Random Medium. New York, USA: McGraw-Hill, 1960.
- [12] A. Asadzadeh, S. M. Alavi, M. Karimi and H. Amiri, " Coherent Wide-band Signals DOA Estimation by the New CTOPS Algorithm," Multidimensional Systems and Signal Processing, Volume 31, pp.1075-1089, 2020.
- [13] Jin He, Linna Li and Ting Shu, "Sparse Nested Arrays with Spatially Spread Square Acoustic Vector Sensors for High-Accuracy Underdetermined Direction Finding", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Volume 57, Issue 4, Aug. 2021.



شکل (۹). سه منبع مستقل در زاویه ۸۰ و ۱۰۰ و ۱۲۰، سطح نویز ۰٫۱

شبیه‌سازی نشان می‌دهد که کیفیت آشکارسازی همچنان که در تحلیل آن نیز پیش‌بینی گردید با افزایش سطح نویز سنسورها و کم‌بودن تأخیر زمانی بین منبع اصلی و انعکاس‌های آن کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش تعداد منابع هم‌دوس، زمانی که تعداد آن‌ها کمتر از تعداد سنسورها باشد، دقت تخمین سیر نزولی خواهد داشت.

## ۶- جمع‌بندی

در این مقاله نشان داده شده است که چگونه می‌توان با استفاده از یک منبع مجازی مستقل اضافی جهت منابع اصلی را برآورد نمود. اضافه کردن این منبع با زاویه متغیر مرتبه ماتریس کواریانس را یک واحد افزایش می‌دهد. با تغییر زاویه منبع مجازی هر جا زاویه آن با زاویه یکی از منابع اصلی هم‌راستا گردد مرتبه ماتریس کواریانس از مقدار افزایش‌یافته به مقدار واقعی تقلیل می‌یابد.

تحلیل تئوری و شبیه‌سازی نشان می‌دهند که چون منابع هم‌دوس هم‌زمان نیستند قابلیت آشکارسازی آن‌ها با ماتریس کواریانس وجود دارد. هرچه تأخیر زمانی بین سیگنال پوش منابع بیشتر باشد آشکارسازی بادقت بالاتری ممکن می‌گردد. این قابلیت وقتی نویز آرایه در سطح پایینی قرار داشته باشد افزایش می‌یابد.

در شرایطی که در محیط انتشار تعداد منابع انعکاس زیاد باشد عملاً تعداد منابع هم‌دوس ایجاد شده از تعداد المان‌های آرایه بیشتر شده و در نتیجه آشکارسازی زاویه آن‌ها را غیرممکن می‌سازد؛ بنابراین بزرگ‌ترین مشکل در تخمین زاویه توسط آرایه‌ها تعداد محدود المان‌های آن هست.

## ۷- مراجع

- [1] S. Shirvani Moghaddam, A. Keshavarz Nasab, "A