

## **An Investigation on the Effects of New Reference Node Addition on the location Estimation Improvement in Positioning Systems**

**N. Golihaghighi<sup>\*</sup> , M. Biguesh**

**\* Shiraz University, Shiraz, Iran**

(Received: 28/05/2021, Accepted: 14/12/2021)

### **Abstract**

In a location estimation system, the deployment of reference nodes significantly affects the accuracy of estimating the location of the desired points. In this paper, it is assumed that the location system is equipped with a number of reference nodes in a specified arrangement, and the goal is to add a number of new reference nodes to improve the location estimation accuracy of a desired emitting node. In this network, the location of an emitting node is estimated by measuring the distances to the reference nodes. An algorithm is proposed to find the optimal place of the new added reference nodes using the frame theory. The basis of this algorithm is to arrange the new reference nodes without changing the location of the present reference nodes in the system in such a way that the determinant of the Fisher information matrix is maximized. The simulation results verify the efficiency of the proposed algorithm in the optimal deployment of new reference nodes.

**Keywords:** Location Estimation, Node Deployment, Frame Theory

---

<sup>\*</sup> Corresponding author E-mail: golihaghighi@shirazu.ac.ir

## علمی - پژوهشی

## افزودن گره‌های مرجع جدید در یک سامانه مکان‌یاب به منظور بهبود تخمین موقعیت مکانی

نفسه گلی حقیقی<sup>۱</sup> و مهرزاد بیغش<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، آزمایشگاه مخابرات بی‌سیم ۲- استاد، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه شیراز

(دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۷، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۲۳)

## چکیده

در یک شبکه مکان‌یابی نحوه چیدمان گره‌های مرجع در شبکه اثر قابل توجهی بر دقت تخمین مکان نقاط مورد نظر دارد. در این مقاله، فرض بر این است که یک شبکه مشتمل بر تعدادی گره مرجع با چیدمانی مشخص شده برای مکان‌یابی است و هدف اضافه کردن تعدادی مرجع جدید به سامانه به منظور افزایش دقت مکان‌یابی است. در این شبکه، مکان یک گره بر اساس اندازه‌گیری فاصله تا گره‌های مرجع تخمین زده می‌شود. برای این منظور با استفاده از نظریه قاب الگوریتمی ارائه شده که توسط آن مکان بهینه گره‌های مرجع جدید به دست می‌آیند. اساس این الگوریتم چینش گره‌های جدید بدون تغییر موقعیت مکانی گره‌های مرجع موجود در سامانه به نحوی است که در ترمینان ماتریس اطلاعات فیشر بیشینه گردد. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام گرفته کارایی الگوریتم پیشنهادی برای چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید را نشان می‌دهد.

## کلید واژه‌ها: مکان‌یابی، چیدمان گره‌های مرجع، نظریه قاب

## ۱- مقدمه

به صورت تصادفی در شبکه پراکنده شده‌اند. به همین دلیل در برخی از مقالات برای حذف اثر آماری مکان قرارگیری گره‌های مرجع در نتایج نهایی، شبکه چندین بار با تغییر مکان گره‌های مرجع شبیه‌سازی شده‌است.

عموماً بر اساس تجربه گره‌های مرجع به‌طور یکنواخت در پیرامون شبکه قرار می‌گیرند. در [۷]، به صورت تحلیلی نشان داده شده‌است که چنین چیدمانی در غیاب سایر اطلاعات در مورد مکان گره‌ها، بهینه است. در [۸]، با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده شده‌است که بهترین چیدمان با در نظر گرفتن ۳ گره مرجع به صورت مثلثی در شبکه زمانی است که مجموع اضلاع مثلث حداقل ۱۰ برابر برد مخابراتی در نظر گرفته شده برای گره‌ها بوده و کوچک‌ترین ارتفاع مثلث تشکیل شده به وسیله این ۳ گره مرجع حداقل برابر با برد مخابراتی گره‌ها باشد. در [۹]، یک سطح  $10 \times 10$  شبکه‌بندی شده در نظر گرفته شده‌است و با استفاده از شبیه‌سازی  $n$  گره مرجع ( $n = 3, 4, \dots, 8$ ) در تمامی نقاط ممکن از  $100$  نقطه مفروض در این سطح قرار داده شده<sup>۲</sup> است. به ازای هر تعداد گره مرجع چیدمانی که به ازای آن به کمترین مقدار متوسط کران پایین کرامر راتو (CRLB<sup>۳</sup>) برسد به عنوان بهترین چیدمان معرفی شده‌است در [۱۰]، با استفاده از شبیه‌سازی

در دسترس بودن اطلاعات مکانی گره‌های موجود در یک شبکه بی‌سیم در کاربردهای متعددی همچون کاربردهای مختلف تجاری و نظامی بسیار حائز اهمیت است. تاکنون روش‌های مختلفی به منظور تخمین مکان منابع منتشر کننده امواج ارائه شده‌است که هر یک به نوبه خود نقاط ضعف و قوتی دارند. از آن میان می‌توان به مکان‌یابی با استفاده از اندازه‌گیری زاویه ورود سیگنال در چند نقطه و پیدا کردن محل تقاطع خطوط زاویه، مکان‌یابی به کمک اندازه‌گیری اختلاف زمان ورود سیگنال و یا مکان‌یابی براساس اختلاف توان دریافتی اشاره کرد [۱-۴]. در شبکه در نظر گرفته شده در مقاله پیش رو، مکان گره مجهول با کمک اندازه‌گیری فاصله گره هدف تا هر یک از گره‌های با مکان مشخص که گره "مرجع"<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند، تخمین زده می‌شود.

از طرف دیگر، نحوه قرارگیری گره‌های مرجع نسبت به گره هدف تأثیر بسیاری بر دقت تخمین مکان گره هدف دارد [۵-۲۱]. بر این اساس، یکی از چالش‌هایی که در مکان‌یابی باید در نظر گرفته شود، نحوه چیدمان گره‌های مرجع در شبکه است و لذا بسیاری از مقالات به دنبال روش‌های ابتکاری به منظور پیدا کردن جواب زیر بهینه هستند [۶]. در اکثر کارهایی که در زمینه مکان‌یابی صورت گرفته‌است، فرض شده که گره‌های مرجع

<sup>۲</sup> تعداد نقاط ممکن برابر با انتخاب  $n$  از  $100$  است که برابر است با: $100! / (n! \times (100 - n)!)$ <sup>۳</sup> Cramer-Rao Lower Bound<sup>۱</sup> Anchor

اختلاف زمان ورود سیگنال با هدف بیشینه کردن دترمینان FIM بررسی شده است، با این فرض که در ابتدا گره‌ها با یک چیدمان مشخص در شبکه قرار گرفته‌اند با استفاده از نظریه قاب چیدمان بهینه برای گره‌های شبکه به نحوی تعیین می‌گردد که میزان جا به جایی گره‌ها نسبت به مکان پیشین آنها حداقل مقدار ممکن باشد. در [۱۸]، بررسی شده زمانی که یک تعداد گره مرجع جدید به شبکه اضافه می‌شود، بهترین مکان برای قرار دادن این گره‌های جدید چه نقاطی است. دو رویکرد مختلف بررسی شده است. در اولین رویکرد گره‌های مرجع جدید در مکان‌هایی قرار می‌گیرند که بیشترین مقدار خطای مکان‌یابی وجود دارد. در روش دوم کل ناحیه تحت پوشش به مناطقی که با هم همپوشانی نیز دارند تقسیم شده و برای هر منطقه مجموع خطای مکان‌یابی تمامی نقاط موجود در منطقه محاسبه می‌شود. گره‌های مرجع در نقاطی قرار داده می‌شوند که بیشترین انباشتگی خطا وجود دارد. با توجه به نتایج شبیه‌سازی‌ها روش دوم عملکرد بهتری دارد. در [۱۹]، مسئله چیدمان گره‌ها در شبکه با هدف تعیین محل قرار دادن گره‌های جدید در شبکه در نظر گرفته شده است به نحوی که دقت مکان‌یابی یک دسته از گره‌های موجود در شبکه بیشترین بهبود را داشته باشد. در [۲۰]، به بررسی چیدمان بهینه تعدادی گره مرجع جدید در شبکه‌ای با یک تعداد گره مرجع ثابت پرداخته شده است به نحوی که گره‌ها با استفاده از اندازه‌گیری زاویه ورود سیگنال مکان خود را به روش مثلث‌سازی<sup>۶</sup> تخمین می‌زنند. در [۲۰] تمامی گره‌های جدید به ۳ دسته تقسیم شده و به تمامی گره‌های موجود در هر دسته تنها یک زاویه اختصاص داده می‌شود.

در مقاله پیش‌رو، روشی جهت پیدا کردن مکان بهینه برای اضافه کردن گره‌های مرجع جدید به یک شبکه اولیه با گره‌های مرجع با چیدمان مشخص پیشنهاد شده است به نحوی که دترمینان FIM بیشینه گردد. به این منظور از نظریه قاب کمک گرفته می‌شود. با استفاده از الگوریتم ارائه شده در این مقاله می‌توان تعداد دلخواه گره مرجع جدید را به سامانه اضافه کرد. الگوریتم پیشنهادی را می‌توان در سامانه‌های مکان‌یابی براساس اندازه‌گیری فاصله استفاده کرد.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش (۲) مدل سامانه بیان شده است. در بخش (۳)، معیار مورد نیاز برای بهینه‌سازی چیدمان گره‌های مرجع در شبکه انتخاب شده است در بخش (۴)، FIM برای روش مکان‌یابی با استفاده از اندازه‌گیری فاصله ارائه شده است. نظریه قاب در بخش ۵ مختصراً معرفی

نشان داده شده است که قرار دادن ۳ گره مرجع به صورت یک مثلث متساوی الاضلاع انتخاب مناسبی است و دقت مکان‌یابی برای نقاط درون مثلث بهتر از نقاط بیرونی است. در [۱۱]، با استفاده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری به این نتیجه رسیده‌اند که بهترین چیدمان قرار دادن گره‌های مرجع بر روی یک دایره با قطری برابر با ۸۰ درصد طول ضلع شبکه مربع شکل است. در [۱۲]، فرض بر این است که حسگرها در کف دریا قرار داده شده‌اند و اطلاعات آنها از طریق گره‌هایی به راهنماهای شناور مرجع که مکان مشخصی دارند ارسال می‌گردد. هدف پیدا کردن عمق مناسب برای قرار دادن شناورهای مرجع در زیر دریا به وسیله بیشینه کردن دترمینان ماتریس اطلاعات فیشر<sup>۱</sup> (FIM) است. برای ساده کردن مسئله آن را به صورت بیشینه کردن مجموع دترمینان ماتریس FIM گره‌های موجود در شبکه در نظر گرفته و ارتفاع قرار دادن شناورهای مرجع با استفاده از روش‌های تکرار شونده<sup>۲</sup> تعیین شده است. در [۱۳]، موقعیت هندسی بهینه قرارگیری گره‌های مرجع نسبت به گره هدف در حالتی بررسی شده است که گره هدف در محلی خارج از ناحیه قرارگیری گره‌های مرجع باشد. در [۱۴] نشان داده شده است که کمینه کردن اثر<sup>۳</sup> CRLB معادل با کمینه کردن مجموع معکوس مؤلفه‌های قطر اصلی FIM است با این شرط که FIM یک ماتریس قطری شود. در [۱۴]، حالت‌هایی که به ازای آنها CRLB با در نظر گرفتن ۲، ۳ و نیز ۴ گره قطری می‌شود مشخص شده و چیدمانی که کمترین مقدار اثر CRLB را نتیجه دهد به عنوان چیدمان بهینه در آن شبکه خاص در نظر گرفته می‌شود. در [۱۵]، فرض شده است که مکان گره هدف یک توزیع تصادفی یکنواخت در یک دایره واحد دارد. در [۱۵]، هدف تعیین مکان N گره مرجع درون این دایره است. برای سادگی میانگین دترمینان ماتریس FIM نسبت به مکان گره هدف به عنوان معیاری برای بررسی بهینه بودن چیدمان گره‌های مرجع در نظر گرفته شده است در برخی مقالات از نظریه قاب<sup>۴</sup> به منظور حل مسئله چیدمان بهینه گره‌ها به ویژه در موقعیت‌های پیچیده استفاده شده است [۱۶]، [۲۰]. در هر مسئله بهینه‌سازی که افزونگی<sup>۵</sup> وجود دارد می‌توان از نظریه قاب استفاده کرد. در مسئله چیدمان بهینه گره‌ها، نسبت تعداد گره‌ها به ابعاد فضا را می‌توان افزونگی در نظر گرفت [۱۶]. در [۱۷]، چیدمان مناسب گره‌ها در شبکه به منظور مکان‌یابی گره هدف با استفاده از روش اندازه‌گیری

<sup>۱</sup> Fisher Information Matrix

<sup>۲</sup> Iterative

<sup>۳</sup> Trace

<sup>۴</sup> Frame theory

<sup>۵</sup> Redundancy

<sup>۶</sup> Triangulation

در مقاله پیش‌رو، با در نظر گرفتن فضای ۲ بعدی روشی جهت پیدا کردن مکان بهینه برای اضافه کردن گره‌های مرجع جدید به یک شبکه پیشنهاد شده‌است که دترمینان FIM را بیشینه می‌کند.

#### ۴- محاسبه ماتریس اطلاعات فیشر

در این بخش، به محاسبه ماتریس اطلاعات فیشر در سامانه مکان‌یابی با استفاده از اندازه‌گیری فاصله پرداخته می‌شود.

کران پایین کران‌ها، حداقل مقدار واریانس یک تخمین‌گر بدون بایاس را نشان می‌دهد که به صورت معکوس FIM تعریف می‌شود [۲۲].

در نظریه تخمین گفته می‌شود که برای ماتریس کواریانس تخمین‌گر بدون بایاس بردار تصادفی  $\theta$  که با  $R_\theta$  نشان داده می‌شود و ماتریس اطلاعات فیشر که با  $F(\theta)$  نشان داده می‌شود رابطه زیر برقرار است [۲۳]:

$$R_\theta \geq F(\theta)^{-1} \quad (2)$$

به این معنا که ماتریس  $R_\theta - F(\theta)^{-1}$  یک ماتریس نیمه معین مثبت<sup>۲</sup> است.

ماتریس FIM به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(\theta) = E_{\hat{d}}\{\nabla_{\theta} \ln p(\hat{d}; \theta) \times \nabla_{\theta}^T \ln p(\hat{d}; \theta)\} \quad (3)$$

در این رابطه  $\hat{d}$  و  $p(\hat{d}; \theta)$  به ترتیب بردار مشاهدات و تابع چگالی احتمال (pdf) بردار مشاهدات به شرط بردار مجهولات است.  $E_{\hat{d}}\{\cdot\}$  امید ریاضی<sup>۳</sup> روی بردار مشاهدات بوده،  $\nabla$  و  $\ln(\cdot)$  به ترتیب بیانگر لگاریتم طبیعی و گرادیان هستند.

نیمه معین مثبت بودن این ماتریس بدین معناست که برای هر بردار دلخواه  $v$  با طولی برابر با بردار  $\theta$  می‌توان نوشت:  $v^T(R_\theta - F(\theta)^{-1})v \geq 0$  و به این ترتیب با انتخاب  $v = e_i$ ، به نحوی که  $e_i$  برداری است که تمام المان‌های آن صفر هستند به جز المان  $\lambda_m$  آن که برابر با یک است، می‌توان حد پایین واریانس تخمین  $\theta_i$  (یعنی  $[R_\theta]_{ii}$ ) را برابر با  $[F(\theta)^{-1}]_{ii}$  دانست. در اینجا، المان سطر  $\lambda_m$  و ستون  $\lambda_m$  از ماتریس  $R_\theta$  با  $[R_\theta]_{ii}$  نشان داده شده و منظور از  $\theta_i$  المان  $\lambda_m$  از بردار  $\theta$  است.

در مکان‌یابی براساس فاصله FIM را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۴]:

شده‌است. در بخش (۶)، الگوریتم پیشنهادی برای چیدمان بهینه گره‌های مرجع اضافه شده به شبکه اولیه با گره‌های مرجع با چیدمان مشخص معرفی شده‌است. در بخش (۷)، با استفاده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری عملکرد الگوریتم ارائه شده بررسی شده‌است. در بخش (۸)، به بیان نتایج پرداخته شده‌است.

#### ۲- مدل سامانه

شبکه‌ای را در نظر بگیرید که در آن مکان گره مجهول با کمک اندازه‌گیری فاصله نسبت به گره‌های مرجع با مکان معلوم تخمین زده می‌شود. در این مقاله، گره مجهول را گره هدف نامیده و مکان آن را با  $s_i$  نشان می‌دهیم. فرض شده‌است که در ابتدا  $m$  گره مرجع با چیدمانی دلخواه در شبکه وجود دارد و این امکان فراهم شده‌است تا برای بهبود عملکرد مکان‌یابی  $k$  گره مرجع جدید به شبکه اضافه شود. مکان این گره‌های مرجع باید به نحوی انتخاب شود که بتواند بیشترین اثر را در بهبود دقت مکان‌یابی گره هدف داشته باشد. مکان گره مرجع  $\lambda_m$  با  $p_i$  برای  $i = 1, \dots, m + k$  نمایش داده می‌شود. فاصله اندازه‌گیری شده گره هدف تا گره مرجع  $\lambda_m$  با  $\hat{d}_i$  نشان داده شده‌است:

$$\hat{d}_i = d_i + n_i \quad (1)$$

که در این رابطه  $d_i = \|s_i - p_i\|$  فاصله گره هدف تا گره مرجع  $\lambda_m$  می‌باشد و  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی است.  $n_i$  نویز اندازه‌گیری است که توزیع آن گوسی با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_n^2$  در نظر گرفته شده‌است. به این ترتیب،  $\hat{d} = [\hat{d}_1 \dots \hat{d}_{m+k}]^T$  بردار مشاهدات است.

#### ۳- معیار بهینه‌سازی چیدمان گره‌های مرجع در شبکه

معیارهای مختلفی را می‌توان برای پیدا کردن چیدمان بهینه گره‌های مرجع در نظر گرفت. یکی از این معیارها به کمینه کردن بیشترین مقدار ویژه CRLB می‌پردازد که معادل با بیشینه کردن کمترین مقدار ویژه FIM است [۱۳]، [۱۴]، [۲۱]. در این روش خطای مکان‌یابی را در جهتی که بیشترین مقدار را دارد کمینه می‌کنند. معیار دیگر به کمینه کردن اثر ماتریس در CRLB می‌پردازد [۱۳]، [۱۴]، [۲۱]. معیار دیگری که از رایج‌ترین معیارها در بحث چیدمان بهینه گره‌است، بیشینه کردن دترمینان FIM است. با استفاده از این معیار حجم بیضی عدم اطمینان<sup>۱</sup> که به وسیله معکوس FIM مشخص می‌گردد کمینه می‌شود [۱۳]، [۱۴]، [۲۱].

<sup>2</sup> Positive Semidefinite

<sup>3</sup> Expected value

<sup>1</sup> Uncertainty ellipsoid

$$\{g_i^*\}_{i=m+1}^{m+k} = \arg \min_{\{g_i\}_{i=m+1}^{m+k}} \left\| \sum_{i=1}^{m+k} g_i g_i^T \right\|^2 \quad (9)$$

در هر مسئله بهینه‌سازی که افزونگی وجود دارد می‌توان از نظریه قاب استفاده کرد [۱۶]. در مسئله چیدمان بهینه گره‌ها، نسبت تعداد گره‌ها به ابعاد فضا را می‌توان افزونگی در نظر گرفت. بنابراین، زمانی که تعداد گره‌ها بیشتر از ابعاد فضا باشد، تحلیل مسئله چیدمان بهینه گره‌ها را می‌توان از طریق نظریه قاب بررسی نمود [۱۶]. به این ترتیب، برای حل مسئله بهینه‌سازی (۹) می‌توان از نظریه قاب استفاده کرد.

### ۵- نظریه قاب

دنباله محدود بردارهای  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$  در  $\mathbb{R}^d$  برای  $m \geq d$  در صورتی قاب نامیده می‌شود که دو مقدار ثابت  $a, b > 0$  وجود داشته باشد به نحوی که به ازای هر  $y \in \mathbb{R}^d$  شرط زیر برقرار باشد [۱۶]:

$$a \|y\|^2 \leq \sum_{i=1}^m |y^T \phi_i|^2 \leq b \|y\|^2 \quad (10)$$

که در این رابطه  $a$  و  $b$  کرانه‌های قاب نامیده می‌شوند.

در صورتی که بردارهای  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$  ستون‌های ماتریس  $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_m] \in \mathbb{R}^{d \times m}$  باشند، رابطه بالا را می‌توان به فرم زیر نیز نوشت [۱۶]:

$$a \|y\|^2 \leq y^T \Phi \Phi^T y \leq b \|y\|^2 \quad (11)$$

کران‌های  $a$  و  $b$  به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقادیر ویژه  $\Phi \Phi^T$  هستند و  $a$  باید مقداری مثبت باشد. از آنجا که  $a > 0$  است  $\Phi \Phi^T$  یک ماتریس مثبت تعریفی است. زمانی که  $a = b$  باشد، آنگاه یک قاب مقید<sup>۱</sup> داریم که  $\Phi \Phi^T = a I_d$  است [۱۶]، [۲۰]. در اینجا، ماتریس همانی<sup>۲</sup> با  $I_d \in \mathbb{R}^d$  نشان داده شده‌است.

برای هر دنباله غیرافزایشی  $\{c_i\}_{i=1}^m$  که  $c_1 \geq \dots \geq c_m$  و هر عدد صحیح  $d$  که برای آن  $1 \leq d \leq m$ ، دنباله  $\{c_i\}_{i=1}^m$  را در

$$\max_{i=1, \dots, m} c_i^2 \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^m c_i^2 \quad (12)$$

صورتی یک دنباله با قاعده<sup>۳</sup> گویند که داشته باشیم [۱۶]:

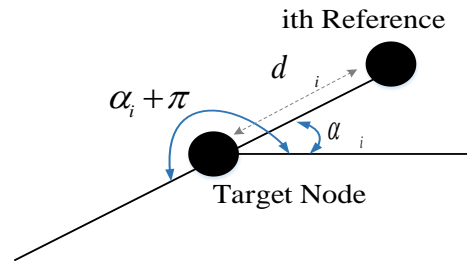
$$F = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^{m+k} g_i g_i^T \quad (4)$$

که در این رابطه  $g_i$  برابر است با [۲۴]:

$$g_i \triangleq \frac{s_t - p_i}{\|s_t - p_i\|} \quad (5)$$

$$= [\cos(\alpha_i) \quad \sin(\alpha_i)]^T$$

در این رابطه زاویه‌ای که گره مرجع  $i$ ام و گره هدف با محور افقی می‌سازد را  $\alpha_i$  می‌نامیم. در شکل (۱)، موقعیت گره مرجع  $i$ ام نسبت به گره هدف نشان داده شده‌است.



شکل (۱): موقعیت گره مرجع  $i$ ام نسبت به گره هدف

به این ترتیب، در صورتی که دترمینان ماتریس مربعی  $F$  با  $\det(F)$  نشان داده شود، مسئله چیدمان بهینه  $k$  گره مرجع اضافه شده به شبکه را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\{g_i^*\}_{i=m+1}^{m+k} = \arg \max_{\{g_i\}_{i=m+1}^{m+k}} \det(F) \quad (6)$$

در صورتی که اثر ماتریس با  $\text{tr}(\cdot)$  نشان داده شود، در فضای  $2$  بعدی داریم:

$$\det(F) = \frac{1}{2} (\text{tr}(F)^2 - \text{tr}(F^2)) \quad (7)$$

بنابراین، با توجه به اینکه  $\text{tr}(F) = (m+k)/\sigma_n^2$  به مکان گره‌های مرجع جدید وابسته نیست و نیز با توجه به اینکه  $F$  یک ماتریس متقارن است و  $\text{tr}(F^2) = \|F\|^2$ ، مسئله چیدمان بهینه  $k$  گره مرجع اضافه شده به شبکه را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\{g_i^*\}_{i=m+1}^{m+k} = \arg \min_{\{g_i\}_{i=m+1}^{m+k}} \|F\|^2 \quad (8)$$

مسئله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

<sup>1</sup> Tight frame

<sup>2</sup> Identity matrix

<sup>3</sup> Regular

و متقارن  $\left(\frac{m+k}{2}I_2 - F_m\right)$  استفاده شود، می‌توان نوشت:  $Q\Lambda Q^T = \left(\frac{m+k}{2}I_2 - F_m\right)$ ، که  $Q$  یک ماتریس متعامد است که ستون‌های آن بردارهای ویژه  $\left(\frac{m+k}{2}I_2 - F_m\right)$  است و  $\Lambda$  یک ماتریس قطری است که مؤلفه‌های قطر اصلی آن مقادیر ویژه  $\left(\frac{m+k}{2}I_2 - F_m\right)$  هستند.

با استفاده از تجزیه SVD<sup>۳</sup> برای ماتریس  $G_k \in \mathbb{R}^{2 \times k}$ ، ماتریس قطری  $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ، ماتریس متعامد  $U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  (به این معنا که  $UU^T = U^TU = I_2$ ) و ماتریس  $V \in \mathbb{R}^{k \times 2}$  با ستون‌های متعامد یک<sup>۴</sup> (یعنی  $V^TV = I_2$ ) وجود دارد به نحوی که بتوان نوشت:  $G_k = U\Sigma V^T$ . به این ترتیب داریم:  $G_k G_k^T = U\Sigma^2 U^T$ .

با استفاده از نظریه Wielandt-Hoffman در [۲۶]، می‌توان نوشت:

$$\left\| \frac{m+k}{2}I_2 - F_m - G_k G_k^T \right\| \geq \|\Lambda - \Sigma^2\| \quad (۱۹)$$

توضیح داده شد که می‌توان نوشت:  $aI_2 - F_m = Q\Lambda Q^T$  و  $Q^T \left(\frac{m+k}{2}I_2 - F_m\right) Q = \Lambda$  در این صورت  $G_k G_k^T = U\Sigma^2 U^T$  و  $U^T G_k G_k^T U = \Sigma^2$  بوده که  $\Lambda$  و  $\Sigma^2$  ماتریس‌های قطری هستند. با فرض  $U = Q$ ، سمت چپ رابطه (۱۹) برابر است با:

$$\left\| \frac{m+k}{2}I_2 - F_m - G_k G_k^T \right\| = \|U(\Lambda - \Sigma^2)U^T\| \quad (۲۰)$$

$$= \|\Lambda - \Sigma^2\|$$

بنابراین، با فرض  $U = Q$  حالت تساوی در (۱۹) رخ می‌دهد. در این صورت می‌توان  $G_k$  را به نحوی تعیین کرد که  $U = Q$  باشد. بعلاوه،  $\left\| \frac{m+k}{2}I_2 - F_m - G_k G_k^T \right\|$  زمانی به مقدار کمینه خود می‌رسد که  $\Lambda - \Sigma^2 = 0$  باشد. برای اینکه  $G_k$  به طور کامل تعیین شود کافی است  $V \in \mathbb{R}^{k \times 2}$  را به نحوی انتخاب کنیم که  $V^TV = I_2$  باشد. بعلاوه، با توجه به اینکه برای  $i = 1, \dots, m+k$  داریم:  $\|g_i\|^2 = 1$ ، در صورتی که ردیف نام  $V$  با  $v_i^T$  نشان داده شود لازم است برای  $i = 1, \dots, k$  رابطه  $v_i^T \Lambda v_i = 1$  برقرار باشد.

در اینجا، از روش تصویر کردن متناوب<sup>۵</sup> به منظور پیدا کردن  $V = [v_1 \ \dots \ v_k]^T$  با مشخصات گفته شده استفاده می‌کنیم. این هدف که به جستجوی فصل مشترک دسته ماتریس‌هایی با ساختار مشخص  $V^TV = I_2$  و دسته ماتریس‌هایی که قید  $v_i^T \Lambda v_i = 1$  برای ردیف‌های آن برقرار باشد پرداخته می‌شود. روش تصویر کردن متناوب با یک ماتریس در دسته اول شروع شده، با استفاده از آن ماتریسی با کمترین فاصله در دسته دوم

در چنین دنباله‌ای هیچ یک از مؤلفه‌ها خیلی بیشتر از سایر مؤلفه‌های دیگر دنباله نیست [۱۶].

یک پتانسیل قاب<sup>۱</sup> (FP) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$FP = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\phi_i^T \phi_j)^2 \quad (۱۳)$$

در صورتی که دنباله  $\{\|\phi_i\|\}_{i=1}^m$  یک دنباله باقاعده باشد آنگاه پتانسیل قاب در صورتی کمینه می‌گردد که  $\{\|\phi_i\|\}_{i=1}^m$  یک قاب مقید باشد [۱۶]، [۲۰].

## ۶ - الگوریتم پیشنهادی برای چیدمان بهینه گره‌های مرجع اضافه شده در شبکه

با تعریف  $F_p \triangleq \sum_{i=1}^{m+k} g_i g_i^T$  می‌توان نتیجه گرفت  $\|F_p\|^2 = \sum_{i=1}^{m+k} \sum_{j=1}^{m+k} (g_i^T g_j)^2$  برای دنباله  $\{g_i\}_{i=1}^{m+k}$  است. در این صورت دنباله  $\{g_i\}_{i=1}^{m+k}$  که  $\|F_p\|^2$  را کمینه می‌کند یک قاب مقید با نرم‌های مشخص است. در صورتی که  $g_i$  ستون  $i$ ام ماتریس  $G$  باشد و با تعریف

$$G_m \triangleq [g_1, \dots, g_m] \quad (۱۴)$$

$$G_k \triangleq [g_{m+1}, \dots, g_{m+k}] \quad (۱۵)$$

$$G \triangleq [G_m \ G_k] \quad (۱۶)$$

می‌توان نوشت:

$$F_k \triangleq G_k G_k^T \quad (۱۷)$$

$$F_p = F_m + F_k$$

با توجه به نظریه قاب مقدار کمینه  $\|F_p\|^2$  در صورتی به دست می‌آید که ستون‌های  $G$  یک قاب مقید تشکیل دهند. در این صورت  $F_p = \left(\frac{m+k}{2}\right)I_2$  است و برای اینکه  $\|F_p\|^2$  به مقدار کمینه خود برسد ماتریس  $F_k = G_k G_k^T$  باید به نحوی انتخاب شود که  $F_p$  تا حد ممکن به  $\left(\frac{m+k}{2}\right)I_2$  نزدیک شود. بنابراین با تعیین  $G_k$  از مسئله زیر محل بهینه برای قرار دادن  $k$  گره مرجع جدید مشخص می‌گردد.

$$\arg \min_{G_k} \left\| \frac{m+k}{2}I_2 - F_m - G_k G_k^T \right\|^2 \quad (۱۸)$$

در صورتی که از تجزیه مقادیر ویژه (EVD<sup>۳</sup>) ماتریس مربعی

<sup>۳</sup> Singular Value Decomposition

<sup>۴</sup> Orthonormal

<sup>۵</sup> Alternating projection

<sup>۱</sup> Frame Potential

<sup>۲</sup> Eigen Value Decomposition

$$\gamma^* = \arg \min_{\gamma} \left( \sum_{i=1}^k x_i^T (I_2 + \gamma_i \Lambda)^{-1} x_i + \sum_{i=1}^k \gamma_i \right) \quad (26)$$

برای  $i = 1, \dots, k$ ،  $\gamma_i^*$  را از برابر صفر قرار دادن مشتق تابع هزینه (۲۶) نسبت به  $\gamma_i$  به دست می‌آوریم. معادلات به دست آمده از روش‌های عددی قابل حل هستند. به این ترتیب، ستون  $\Lambda$  ماتریس  $Z_i^*$  با جایگذاری  $\gamma_i^*$  در رابطه (۲۵) به دست می‌آید.

حال کافی است نزدیک‌ترین قاب مقید به ماتریس  $Z_j$  را بیابیم. در [۲۵]، روشی برای پیدا کردن چنین ماتریسی بیان شده است گفته می‌شود در صورتی که تجزیه SVD ماتریس  $Z \in \mathbb{R}^{d \times k}$  که  $d \geq k$  برابر با  $Z = U \Sigma V^T$  باشد، نزدیک‌ترین قاب مقید با ضریب  $a$  به ماتریس  $Z$  با در نظر گرفتن نرم اقلیدسی برابر با  $aUV^T$  است.

الگوریتم پیشنهادی برای چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید در جدول (۱) توضیح داده شده است.

**جدول (۱):** الگوریتم پیشنهادی برای چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید

۱	برای $i = 1, \dots, m$ ، از (۵)، $g_i$ ها را محاسبه کرده و با توجه به (۱۴) ماتریس $G_m$ را تشکیل دهید.
۲	با استفاده از EVD برای $(\frac{m+k}{2} I_2 - G_m G_m^T)$ ماتریس‌های $\Lambda$ و $Q$ را محاسبه کنید.
۳	ماتریس دلخواه $X_0 \in \mathbb{R}^{2 \times k}$ انتخاب شود.
۴	برای $j = 0: J - 1$ ، $Z_j$ را از (۲۵) به دست آورده و با استفاده از SVD آن را به صورت $Z_j = U_z \Sigma_z V_z^T$ نوشته و $X_{j+1} = U_z V_z^T$ برای هر $j$ محاسبه گردد.
۵	ماتریس $G_k = Q \Lambda^{1/2} X_j$ محاسبه شود.

در ادامه، مسئله را برای  $k$  برابر با ۱ و ۲ بررسی می‌کنیم. همان‌طور که پیش از این توضیح داده شد با توجه به (۹) مسئله انتخاب محل  $k$  گره جدید را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\arg \min_{g_{m+1}, \dots, g_{m+k}} \sum_{i=1}^{m+k} \sum_{j=1}^{m+k} (g_i^T g_j)^2 \quad (27)$$

در صورتی که  $k = 1$  باشد، مسئله انتخاب محل قرار دادن گره جدید به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\arg \min_{g_{m+1}} g_{m+1}^T F_m g_{m+1} \quad (28)$$

بنابراین  $g_{m+1}$  باید در راستای بردار ویژه کمترین مقدار ویژه  $F_m$  قرار گیرد. البته باید توجه داشت در صورتی که  $\{g_i\}_{i=1}^m$  یک قاب

به دست آورده می‌شود. پس از آن نقش این دو دسته با یکدیگر عوض شده و الگوریتم تکرار می‌گردد. استفاده از روش تصویر کردن متناوب آسان بوده و معمولاً همگرا می‌شود [۲۵].

برای پیدا کردن دسته ماتریس‌هایی با ساختار مشخص  $V^T V = \sum_{i=1}^k v_i v_i^T = I_2$  می‌توان از قاب مقید کمک گرفت، به این ترتیب که به دنبال  $V^T \triangleq V^T$ ‌هایی باشیم که ستون‌های آن یک قاب مقید با  $a = 1$  تشکیل می‌دهند. این مجموعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{X} \triangleq \{V_T \in \mathbb{R}^{2 \times k} | V_T V_T^T = I_2\} \quad (29)$$

مجموعه  $\mathcal{Z}$  شامل ماتریس‌هایی با ابعاد  $2 \times k$  است که رابطه  $v_i^T \Lambda v_i = 1$  برای ستون‌های آن برقرار باشد. این مجموعه به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۵]:

$$\mathcal{Z} \triangleq \{V_T \in \mathbb{R}^{2 \times k} | v_i^T \Lambda v_i = 1 \text{ for } i = 1, \dots, k\} \quad (29)$$

به این ترتیب، مسئله به صورت پیدا کردن ماتریسی در مجموعه  $\mathcal{X}$  که با در نظر گرفتن نرم اقلیدسی کمترین فاصله را از  $\mathcal{Z}$  داشته باشد تعریف می‌گردد. در صورتی که این دو مجموعه اشتراکی داشته باشند آنگاه ماتریسی با ساختار مورد نظر وجود دارد. در غیر این صورت، ماتریسی با ساختار مورد نظر پیدا می‌کنیم که با در نظر گرفتن نرم اقلیدسی نزدیک‌ترین ماتریس باشد.

ابتدا، لازم است مسئله زیر حل شود:

$$Z_j = \arg \min_{Z \in \mathcal{Z}} \|Z - X_j\|^2 \quad (23)$$

$$\text{s. t. } z_i^T \Lambda z_i - 1 = 0, i = 1, \dots, k$$

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ می‌توان دوگان<sup>۱</sup> مسئله فوق را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی بدون قید نوشت:

$$\arg \min_{Z, \gamma} \left( \sum_{i=1}^k z_i^T z_i - 2 \sum_{i=1}^k x_i^T z_i + \sum_{i=1}^k \gamma_i (z_i^T \Lambda z_i - 1) \right) \quad (24)$$

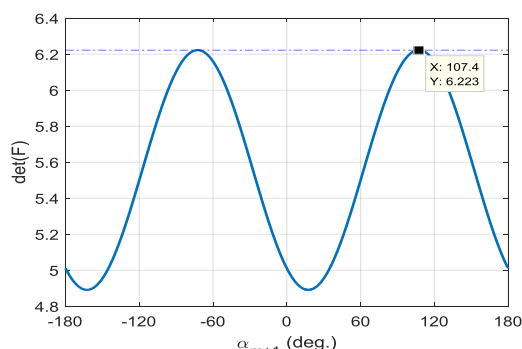
که در این رابطه  $x_i$  و  $z_i$  به ترتیب ستون  $\Lambda$  ماتریس‌های  $Z_j$  و  $X_j$  بوده و  $\gamma = [\gamma_1 \dots \gamma_k]^T$  ضرایب لاگرانژ را نشان می‌دهد. از برابر صفر قرار دادن  $\nabla_{z_i} L(Z_j, \gamma) = 2z_i - 2x_i + 2\gamma_i \Lambda z_i$  می‌توان  $z_i^*$  را برای  $i = 1, \dots, k$  به دست آورد:

$$z_i^* = (I_2 + \gamma_i \Lambda)^{-1} x_i \quad (25)$$

به این ترتیب، با جایگذاری  $z_i^*$  در (۲۴) مسئله به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

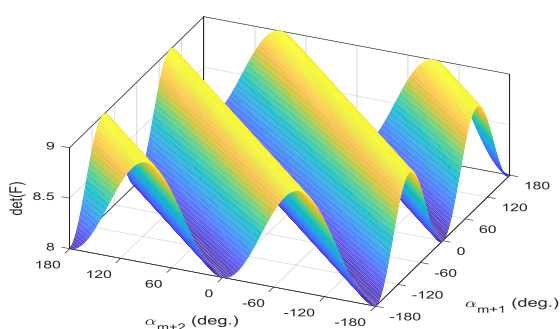
<sup>۱</sup> Dual

همان‌گونه که مشاهده می‌شود دترمینان FIM به ازای  $\alpha_{m+1} = 107.4^\circ$  بیشترین مقدار خود را دارد.



شکل (۲): دترمینان FIM با فرض  $k=1$  و  $m=4$

همان‌طور که در بخش (۶) توضیح داده شد زمانی که هدف اضافه کردن  $k=2$  گره مرجع جدید به شبکه‌ای باشد که  $\{g_i\}_{i=1}^m$  مربوط به  $m$  گره مرجع موجود در شبکه یک قاب مقید تشکیل می‌دهند ۲ گره مرجع جدید باید به نحوی قرار گیرند که  $|\alpha_{m+1} - \alpha_{m+2}| = i\pi + \pi/2$  باشد. به منظور بررسی این مورد با استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری فرض شده‌است که  $m=4$  گره مرجع از قبل در شبکه حضور داشته به طوری که زوایای آنها نسبت به گره هدف ۰، ۴۵، ۹۰ و ۱۳۵ درجه است. با چنین زوایایی  $F_m \propto I$  خواهد بود. در شکل ۳، دترمینان FIM بعد از قرار دادن گره‌های مرجع جدید با زوایای  $\alpha_{m+1}$  و  $\alpha_{m+2}$  رسم شده‌است همان‌گونه که مشاهده می‌شود بیشترین مقدار دترمینان FIM زمانی است که  $|\alpha_{m+1} - \alpha_{m+2}| = i\pi + \pi/2$  باشد.



شکل (۳): دترمینان FIM با فرض  $k=2$  و  $m=4$

در ادامه، به بررسی FIM در شبکه‌ای با  $m=3$  گره مرجع پرداخته شده‌است که  $k$  گره مرجع جدید به آن اضافه می‌شود. در این شبیه‌سازی FIM برای ۵۰۰ بار اجرا محاسبه شده‌است. در هر اجرا زوایای  $m=3$  گره مرجع اولیه به صورت تصادفی انتخاب می‌شود. پس از آن  $k$  گره مرجع جدید یکبار به صورت

مقید باشد، آنگاه  $F_m = bI$  بوده و  $g_{m+1}^T F_m g_{m+1}$  یک مقدار ثابت برابر با  $b$  دارد. در این صورت مسئله (۲۸) دیگر به  $g_{m+1}$  وابسته نیست. در چنین حالتی با توجه به (۱۷) می‌توان نوشت:  $F = bI + g_{m+1} g_{m+1}^T$ . با توجه به تعریف  $g_{m+1}$  در (۵) امکان ندارد  $g_{m+1} g_{m+1}^T \propto I$  شود. در این صورت دیگر نمی‌توان  $g_{m+1}$  را به نحوی تعیین کرد که  $F \propto I$  شود. بنابراین، گره جدید در هر راستایی قرار گیرد چیدمان گره‌های مرجع بهینه نخواهد بود.

برای  $k=2$  می‌توان نوشت:

$$\arg \min_{g_{m+1}, g_{m+2}} \sum_{i=m+1}^{m+2} g_i^T \left( \sum_{j=m+1}^{m+2} g_j g_j^T \right) g_i + 2 \sum_{i=m+1}^{m+2} g_i^T F_m g_i \quad (29)$$

همان‌طور که گفته شد در صورتی که  $\{g_i\}_{i=1}^m$  یک قاب مقید باشد، آنگاه  $F_m = bI$  خواهد بود. در این صورت مسئله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\arg \min_{\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}} \cos(2(\alpha_{m+1} - \alpha_{m+2})) \quad (30)$$

که در این حالت انتخاب بهینه راستای قرارگیری گره‌های جدید به صورت  $|\alpha_{m+1} - \alpha_{m+2}| = i\pi + \pi/2$  است که این انتخاب مشابه با نتیجه بیان شده در [۲۰] برای این حالت است.

## ۷- بررسی عملکرد الگوریتم پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری

در این بخش، با استفاده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری به بررسی عملکرد الگوریتم پیشنهادی برای تعیین چیدمان بهینه  $k$  گره مرجع اضافه شده به شبکه پرداخته شده‌است. در بخش (۶)، چیدمان بهینه  $k \in \{1, 2\}$  گره مرجع جدید که به شبکه‌ای با  $m$  گره مرجع اضافه می‌شوند بررسی شد. در شکل‌های (۲) و (۳)، دترمینان FIM بعد از قرار دادن  $k$  گره مرجع جدید بر حسب  $i$  برای  $i = 1, \dots, k$  رسم شده‌است.

در بخش (۶) توضیح داده شد که مکان بهینه برای اضافه کردن  $k=1$  گره مرجع جدید به شبکه‌ای با  $m$  گره مرجع موجود در راستای بردار ویژه متناظر با کمترین مقدار ویژه  $F_m$  است. در شکل ۲، مناسب‌ترین راستای قرارگیری  $k=1$  گره مرجع جدید اضافه شده به شبکه تعیین شده‌است.  $m=4$  گره مرجع از قبل در شبکه وجود دارند که با زوایای ۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۲۰ درجه نسبت به گره هدف قرار گرفته‌اند. برای چیدمان گفته شده زاویه بردار ویژه متناظر با کمترین مقدار ویژه  $F_m$  نسبت به گره هدف  $107.4^\circ$  است. در شکل (۲)، دترمینان FIM بعد از قرار دادن گره مرجع جدید برحسب زاویه  $\alpha_{m+1}$  رسم شده‌است.



**جدول (۴):** بررسی دترمینان FIM زمانی که شبکه اولیه  $m = 3$  و  $k = 4$  گره مرجع داشته و  $k = 4$  گره مرجع جدید به شبکه اضافه می‌شود.

دترمینان FIM				سناریو در نظر گرفته شده
بیشترین	کمترین	STD	میانگین	
۲/۲۴۴۹	۰/۲۱۰۴	۰/۴۸۸۵	۱/۶۸۶۸	شبکه اولیه
۱۲/۲۴۴۷	۴/۵۳۵۲	۱/۲۱۶۲	۱۱/۰۰۵۷	چیدمان تصادفی گره‌های مرجع جدید
۱۲/۲۵۰۰	۱۲/۲۳۰۹	۰/۰۰۴۹	۱۲/۲۴۰۹	چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید

حال به بررسی خطای تخمین مکان با فرض  $m = 3$  و  $k = 3$  پرداخته می‌شود. به این منظور مشابه با شبیه‌سازی قبل با در نظر گرفتن ۵۰۰ چیدمان تصادفی شبکه اولیه خطای مکان‌یابی گره هدف محاسبه شده‌است. فاصله تمامی گره‌های مرجع تا گره هدف ۱۰۰ در نظر گرفته شده‌است. فرض شده‌است که  $\sigma_{ii}^2 = 1$  باشد. در این شبیه‌سازی  $RMS^2$  خطای تخمین مکان با استفاده از دو روش  $LS^3$  و  $ML^4$  [۲۸] و [۲۹] برای ۵۰۰ تکرار محاسبه شده‌است. از مکان تخمین‌زده شده با روش LS به‌عنوان نقطه اولیه روش ML استفاده شده‌است. علاوه بر ریشه اثر CRLB در هر حالت محاسبه شده تا بتوان عملکرد الگوریتم تخمین مکان را با آن مقایسه نمود. جدول ۵، مقدار میانگین و انحراف استاندارد خطای مکان‌یابی در ۵۰۰ بار اجرا نشان می‌دهد.

در بخش (۶) توضیح داده شد که با توجه به نظریه قاب زمانی دترمینان FIM بیشینه است که  $F = \left(\frac{m+k}{2\sigma_{ii}^2}\right) I_2$  باشد. در این صورت، کمترین مقدار ریشه اثر CRLB برای شبکه در نظر گرفته شده در این شبیه‌سازی ۰/۸۱۶۵ است. مشاهده می‌شود زمانی که محل گره‌های مرجع جدید با استفاده از الگوریتم پیشنهادی تعیین شود ریشه اثر CRLB با انحراف استاندارد ۰/۰۰۰۷ کمترین مقدار ممکن را دارد. همچنین، مشاهده می‌شود که همواره انحراف استاندارد و میانگین خطای مکان‌یابی با در نظر گرفتن چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید نسبت به سایر موارد کمترین مقدار را دارد. لازم به ذکر است همان‌طور که از نتایج مشخص است خطای مکان‌یابی با استفاده از روش ML بسیار نزدیک به نتایج به‌دست آمده از CRLB است.

تصادفی چیده می‌شوند و بار دیگر این گره‌ها با چیدمان بهینه با استفاده از الگوریتم پیشنهادی در شبکه قرار می‌گیرند. جداول (۲) تا (۴) به ترتیب دترمینان FIM برای  $k$  برابر با ۱، ۲ و ۴ را نشان می‌دهند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود افزایش تعداد گره‌های مرجع در شبکه سبب افزایش دترمینان FIM نسبت به شبکه اولیه شده‌است بعلاوه، مشاهده می‌شود زمانی که از الگوریتم پیشنهادی برای چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید استفاده شود دترمینان FIM بیشترین مقدار میانگین و کمترین انحراف استاندارد (STD<sup>۱</sup>) را دارد.

مطابق با جدول (۲)، انحراف استاندارد برای قرار دادن  $k = 1$  گره مرجع جدید با استفاده از الگوریتم پیشنهادی نسبت به  $k$  برابر با ۲ و ۴ در جداول (۳) و (۴) مقدار بیشتری دارد که به این دلیل است که در حالتی که چیدمان  $m = 3$  گره مرجع به نحوی باشد که  $\{g_i\}_{i=1}^m$  تشکیل یک قاب مقید دهند قرار دادن یک گره مرجع جدید گرچه دترمینان FIM را افزایش می‌دهد اما لزوماً مقدار دترمینان FIM را بیشینه نمی‌کند.

**جدول (۲):** بررسی دترمینان FIM زمانی که شبکه اولیه  $m = 3$  و  $k = 1$  گره مرجع داشته و  $k = 1$  گره مرجع جدید به شبکه اضافه می‌شود.

دترمینان FIM				سناریو در نظر گرفته شده
بیشترین	کمترین	STD	میانگین	
۲/۲۴۸۸	۰/۲۳۲۰	۰/۴۶۶۶	۱/۷۱۳۷	شبکه اولیه
۳/۹۹۸۹	۰/۳۹۶۵	۰/۷۴۳۰	۳/۲۱۳۳	چیدمان تصادفی گره مرجع جدید
۴/۰۰۰۰	۳/۱۵۲۵	۰/۱۷۵۹	۳/۸۷۵۴	چیدمان بهینه گره مرجع جدید

**جدول (۳):** بررسی دترمینان FIM زمانی که شبکه اولیه  $m = 3$  و  $k = 2$  گره مرجع داشته و  $k = 2$  گره مرجع جدید به شبکه اضافه می‌شود.

دترمینان FIM				سناریو در نظر گرفته شده
بیشترین	کمترین	STD	میانگین	
۲/۲۴۸۸	۰/۲۳۲۰	۰/۴۶۶۶	۱/۷۱۳۷	شبکه اولیه
۶/۲۴۸۸	۱/۵۵۶۶	۰/۹۰۰۴	۵/۲۴۱۴	چیدمان تصادفی گره مرجع جدید
۶/۲۵۰۰	۶/۱۳۴۳	۰/۰۲۵۷	۶/۲۴۳۷	چیدمان بهینه گره مرجع جدید

<sup>۲</sup> Root Mean Square

<sup>۳</sup> Least Square

<sup>۴</sup> Maximum Likelihood

<sup>۱</sup> Standard Deviation

دترمینان ماتریس اطلاعات فیشر را بیشینه نماید. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام گرفته کارایی الگوریتم پیشنهادی برای چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید را نشان داد.

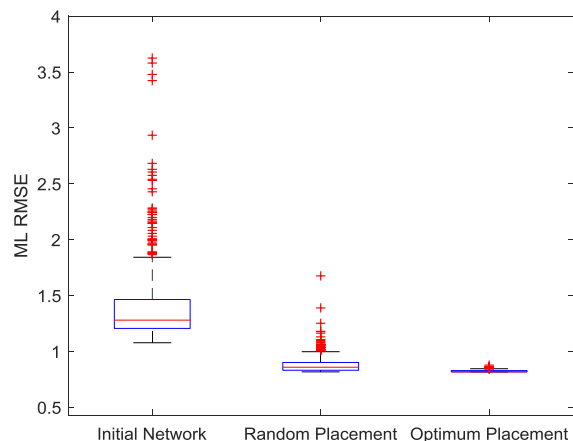
## ۹- مراجع

- [1] S. V. Shojadini, R. Kabiri, A. Kermani, and M. Fereydooni, "A New Method for Minimization of the Effect of Noise in Measuring Delays Between Receiver Sites in Geolocation Based on TDOA of Signals," Journal of "Radar", vol. 3, no. 3, pp. 55-63, 2015 (In Persian).
- [2] A. Gholipour, B. Zakeri, and Kh. Mafinejad, "Near-Field Source Localization in Non-homogeneous Environments," Journal of "Radar", vol. 4, no. 1, pp. 49-56, 2016. (In Persian)
- [3] K. N. R. S. V. Prasad and V. K. Bhargava, "RSS Localization Under Gaussian Distributed Path Loss Exponent Model," IEEE Wireless Communications Letters, vol. 10, no. 1, pp. 111-115, Jan. 2021.
- [4] Y. Zou and H. Liu, "RSS-Based Target Localization With Unknown Model Parameters and Sensor Position Errors," IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 70, no. 7, pp. 6969-6982, July 2021.
- [5] S. Xu, "Optimal Sensor Placement for Target Localization Using Hybrid RSS, AOA and TOA Measurements" IEEE Communications Letters, vol. 24, no. 9, pp. 1966-1970, Sept. 2020.
- [6] M. Younis and K. Akkaya, "Strategies and techniques for node placement in wireless sensor networks: A survey," Ad Hoc Networks, vol. 6, no. 4, pp. 621-655, June 2008.
- [7] J. N. Ash, and R. L. Moses, "On optimal anchor node placement in sensor localization by optimization of subspace principal angles," in Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal, pp. 2289-2292, 2008.
- [8] B. Tatham and T. Kunz, "Anchor node placement for localization in wireless sensor networks," in Proc. IEEE 7th International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications (WiMob), pp. 180-187, November 2011.
- [9] N. Salman, H. K. Maheshwari, A. H. Kemp, and M. Ghogho, "Effects of anchor placement on mean-CRB for localization," in Proc. 10th IFIP Annual Mediterranean Ad Hoc Networking Workshop, pp. 115-118, 2011.
- [10] Y. Ji, S. Biaz, S. Wu, and B. Qi, "Optimal sniffers deployment on wireless indoor localization," in Proc. 16th International Conference on Computer Communications and Networks, (ICCCN 2007), pp. 251-256, 2007.
- [11] X. Li, H. Shi and Y. Shang, "Selective Anchor Placement Algorithm for Ad-Hoc Wireless Sensor Networks," in Proc. IEEE International Conference on Communications, Beijing, pp. 2359-2363, 2008.
- [12] N. Saeed, T. Y. Al-Naffouri, and M. Alouini, "Outlier Detection and Optimal Anchor Placement for 3-D Underwater Optical Wireless Sensor Network Localization," IEEE Transactions on Communications, vol. 67, no. 1, pp. 611-622, Jan. 2019.
- [13] M. Sadeghi, F. Behnia, and R. Amiri, "Optimal Sensor Placement for 2-D Range-Only Target Localization in

جدول (۵): بررسی خطای تخمین مکان زمانی که شبکه اولیه  $m = 3$  گره مرجع داشته و  $k = 3$  گره مرجع جدید به شبکه اضافه می‌شود.

خطای تخمین مکان						سناریو در نظر گرفته شده
روش LS		روش ML		ریشه اثر CRLB		
STD	میانگین	STD	میانگین	STD	میانگین	
۴/۴۹۲۹	۶/۷۴۲۹	۰,۵۲۴۹	۱/۴۳۶۴	۰/۳۹۸۰	۱/۴۳۰۰	شبکه اولیه
۱/۲۳۷۳	۲/۴۱۳۳	۰,۰۷۹۷	۰/۸۸۱۹	۰/۰۷۸۲	۰/۸۸۰۵	چیدمان تصادفی گره‌های مرجع جدید
۰/۵۵۳۰	۲/۰۱۹۰	۰/۰۱۰۴	۰/۸۲۳۲	۰/۰۰۰۷	۰/۸۱۶۵	چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید

در شکل (۴)، RMS خطای مکان‌یابی با استفاده از روش ML نشان داده شده است. می‌توان گفت که خطای مکان‌یابی با استفاده از چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید تقریباً به ازای تمامی ۵۰۰ چیدمان شبکه اولیه کمترین مقدار ممکن را دارد.



شکل (۴): مقایسه خطای تخمین مکان با استفاده از روش ML با فرض  $k = 3$  و  $m = 3$

## ۸- نتیجه‌گیری

نحوه قرارگیری گره‌های مرجع با مکان معلوم نسبت به گره‌های هدف با مکان نامعلوم بر دقت تخمین مکان گره‌های هدف بسیار اثرگذار است. در این مقاله، فرض شده است که تعدادی گره مرجع با چیدمانی مشخص در شبکه وجود دارد و می‌خواهیم تعدادی گره مرجع جدید را به منظور بهبود دقت مکان‌یابی گره هدف به شبکه اضافه کنیم. در این شبکه، مکان گره هدف با توجه به اندازه‌گیری فاصله گره هدف تا گره‌های مرجع تخمین زده می‌شود. در این مقاله، با استفاده از نظریه قاب الگوریتمی برای چیدمان بهینه گره‌های مرجع جدید پیشنهاد شده به نحوی که

- [22] J. Dauwels, "Computing Bayesian Cramér-Rao bounds," in Proc. International Symposium on Information Theory, (ISIT 2005), Adelaide, SA, Australia, 31 October 2005.
- [23] S. M. Kay, "Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory, Prentice Hall," pp. 47, 1993.
- [24] N. Golihaghighi and M. Biguesh, "Node Selection in a Cooperating Position Finding Distributed System Concerning the Computational Complexity Reduction," Journal of "Radar", vol. 7, no. 2, pp. 15-23, 2020. (In Persian)
- [25] J. A. Tropp, I. S. Dhillon, R. W. Heath, and T. Strohmer, "Designing structured tight frames via an alternating projection method," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 51, no. 1, pp. 188-209, January 2005.
- [26] R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 2013.
- [27] C. D. Meyer, "Matrix analysis and applied linear algebra," SIAM, 2000.
- [28] Q. Cui, Y. Shi, X. Zhang, S. Cao, and X. Tao, "Performance analyses and enhancement of distributed cooperative localisation on position ambiguity," IET Communications, vol. 8, 2014.
- [29] L. Heng and G. X. Gao, "Accuracy of range-based cooperative positioning: a lower bound analysis," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 53, pp. 2304-2316, October 2017.
- Constrained Sensor Geometry," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 68, pp. 2316-2327, 2020.
- [14] S. Xu and K. Doğançay, "Optimal Sensor Placement for 3-D Angle of Arrival Target Localization," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 53, no. 3, pp. 1196-1211, June 2017.
- [15] Q. Miao and B. Huang, "On the optimal anchor placement in single-hop sensor localization," Wireless Networks, vol. 24, pp. 1609-1620, July 2018.
- [16] S. Zhao, B. Chen, and T. Lee, "Optimal sensor placement for target localisation and tracking in 2D and 3D," International Journal of Control, vol. 86, no. 10, pp. 1687-1704, 2013.
- [17] C. Rusu and J. Thompson, "On the use of tight frames for optimal sensor placement in time-difference of arrival localization," in Proc. 25th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Kos, pp. 1415-1419, 2017.
- [18] N. Bulusu, J. Heidemann, and D. Estrin, "Adaptive beacon placement," in Proc. 21st International Conference on Distributed Computing Systems, pp. 489 - 498, Apr 2001.
- [19] M. Z. Win, W. Dai, Y. Shen, G. Chrisikos, and H. V. Poor, "Network Operation Strategies for Efficient Localization and Navigation," Proceedings of the IEEE, vol. 106, pp. 1224-1254, July 2018.
- [20] X. Fang and J. Li, "Frame Theory for Optimal Sensor Augmentation Problem of AOA Localization," IEEE Signal Processing Letters, vol. 25, no. 9, pp. 1310-1314, September 2018.
- [21] E. Tzoreff and A. J. Weiss, "Single Sensor Path Design for Best Emitter Localization via Convex Optimization," IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 16, no. 2, pp. 939-951, February 2017.