

## مکان‌یابی اهداف در رادارهای چند ورودی چند خروجی با آنتن‌های توزیع یافته

روح‌الله امیری<sup>۱</sup>، فریدون بهنیا<sup>۲\*</sup>

۱- پژوهشگر پسادکتری، دانشگاه صنعتی شریف، ۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

(دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۷، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۲۸)

## چکیده

در این مقاله، مسأله مکان‌یابی بیضوی اهداف در رادارهای چند ورودی چند خروجی با آنتن‌های توزیع یافته بررسی شده است. هدف مکان‌یابی بیضوی، تخمین موقعیت هدف از روی دسته‌ای از اندازه‌گیری‌های نویزی تأخیر بای‌استاتیک می‌باشد. از آنجایی که تخمین ML متناظر با مکان‌یابی بیضوی مسأله‌ای غیرمحدب می‌باشد، استفاده از روش‌های عددی برای حل آن می‌تواند منجر به همگرایی به نقاط کمینه محلی شود. برای رفع این مشکل، در این مقاله تخمین‌گرهایی (عموماً شکل‌بسته) برای حل مسأله مکان‌یابی ارائه شده است که این الگوریتم‌ها برای همگرایی به پاسخ سراسری مشکلی نخواهند داشت. روش‌های ارائه شده، از نظر عملکردی تا سطوح نسبتاً بالای نویز کارا بوده و به باند کرامر-رائو می‌رسند. این روش‌ها دقت مکان‌یابی بالاتری نسبت به روش‌های موجود دارند. همچنین، با توجه به ذات شکل‌بسته و جبری روش‌های ارائه شده، پیچیدگی محاسباتی آن‌ها بسیار پایین است. البته از این نظر، عملکرد سایر روش‌های شکل‌بسته موجود در ادبیات نیز مشابه می‌باشد. لازم به ذکر است که ایده‌های ارائه شده در این مقاله می‌تواند به عنوان پایه‌ای برای ادامه پژوهش در حوزه مکان‌یابی راداری در نظر گرفته شود.

**کلید واژه‌ها:** مکان‌یابی اهداف، رادارهای چند ورودی چند خروجی، باند کرامر-رائو، تخمین‌گر حداقل مربعات وزن دار، تأخیر بای‌استاتیک.

## ۱- مقدمه

بهبود قدرت مکان‌یابی اهداف [۴] و بهبود دقت تفکیک‌پذیری زاویه‌ای [۵] اشاره کرد. در دسته دوم، آنتن‌های فرستنده و گیرنده در فواصل دور از هم قرار می‌گیرند. در رادارهای MIMO با استفاده از زوج‌های بای‌استاتیک (فرستنده-گیرنده) مختلف می‌توان به مشاهدات زاویه‌ای مستقل از هر هدف دست یافت که این امر موجب ایجاد چندگانگی مکانی می‌شود [۶]. همچنین، با استفاده از رادارهای MIMO با آنتن‌های توزیع یافته می‌توان به عملکرد بهتری در آشکارسازی، مکان‌یابی و تفکیک اهداف دست یافت [۷-۹]. تمرکز ما در این مقاله بر روی رادارهای MIMO با آنتن‌های توزیع یافته می‌باشد.

مسأله یافتن مشخصات سینماتیکی (موقعیت و سرعت) اهداف تشعشع‌کننده یا منعکس‌کننده توسط مجموعه‌ای از گیرنده‌های توزیع شده در محیط، در طی چند دهه اخیر در کاربردهایی از جمله رادار، سونار، شبکه‌های حسگری بی‌سیم و مخابرات مطرح شده‌اند [۱۰]. این مسائل تحت عنوان مکان‌یابی در ادبیات شناخته می‌شود. به طور خاص کاربرد گسترده مکان‌یابی در سامانه‌های رادارهای مراقبتی و ردیابی، این بلوک را به یک جزء اصلی پردازش‌های راداری تبدیل کرده است. به صورت کلی، روش‌های مکان‌یابی به دو دسته روش‌های مستقیم و غیرمستقیم تقسیم می‌شوند. در روش‌های دسته نخست، مشخصات سینماتیکی اهداف، مستقیماً از روی سیگنال‌های

پس از پیدایش ایده استفاده از سامانه‌های چند ورودی و چند خروجی در ادبیات مخابرات و اثبات مزایای گوناگون این سامانه‌ها نسبت به سامانه‌های مخابراتی تک ورودی و تک خروجی، ایده‌ای مشابه در طراحی سامانه‌های راداری با عنوان رادار MIMO<sup>۱</sup> مطرح شد [۱]. به‌طور کلی، رادار MIMO راداری است که از چندین فرستنده با شکل موج‌های ارسالی معمولاً مستقل از هم و چندین گیرنده دارای تعامل با یکدیگر تشکیل می‌شود. این رادارها برحسب نحوه چینش آنتن‌هایشان به دو دسته کلی هم‌مکان<sup>۲</sup> و توزیع یافته<sup>۳</sup> تقسیم می‌شوند.

در دسته نخست، آنتن‌های رادار MIMO به‌گونه‌ای در کنار هم قرار می‌گیرند که امکان پردازش هم‌دوس و آرایه‌ای بین مشاهدات آنتن‌ها فراهم می‌شود [۲]. این رادارها از چندگانگی شکل موج برای بهبود عملکرد رادار استفاده می‌کنند. از جمله مزیت‌های مهم رادار MIMO هم‌مکان نسبت به رادارهای آرایه فازی می‌توان به تعداد شاخص‌های قابل تشخیص بیشتر [۳]،

\* رایانامه نویسنده مسئول: behnia@sharif.edu.ir

<sup>۱</sup> Multiple-Input Multiple-Output<sup>۲</sup> Colocated<sup>۳</sup> Widely Distributed

بهینه (باند کرامر-رائو) فاصله دارد. همچنین، با افزایش سطح نویز، عملکرد آن به شدت از باند فاصله می‌گیرد.

در این مقاله، مسأله مکان‌یابی مبتنی بر اندازه‌گیری‌های تأخیر بای‌استاتیک در رادارهای MIMO مورد بررسی قرار خواهد گرفت. پس از مدل‌سازی مسأله مکان‌یابی بیضوی، تخمین‌گر  $ML^1$  متناظر فرمول‌بندی می‌شود. از آنجایی که مسأله  $ML$  حاصل مسأله‌ای غیرمحدب می‌باشد، استفاده از روش‌های عددی برای حل آن می‌تواند منجر به همگرایی به نقاط کمینه محلی شود. همچنین، پیچیدگی روش‌های تکراری عموماً زیاد می‌باشد. برای رفع مشکلات فوق، دو روش برای حل تقریبی این مسأله ارائه خواهد شد که تا سطوح نسبتاً بالای نویز عملکردی مشابه تخمین‌گر بهینه داشته و به باند عملکردی کرامر-رائو می‌رسند. این تخمین‌گرها دارای ساختار نزدیک به شکل‌بسته بوده و مشکلات پیچیدگی و همگرایی محلی روش‌های تکراری حل مسأله  $ML$  را نخواهند داشت. همچنین با توجه به نتایج شبیه‌سازی‌های عددی، این روش‌ها دقت مکان‌یابی بهتری نسبت به روش‌های موجود ارائه می‌دهند.

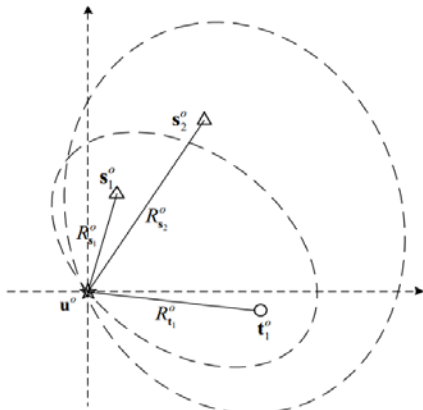
ساختار ادامه مقاله به این صورت می‌باشد. در بخش ۲، به مدل‌سازی سامانه راداری و اندازه‌گیری‌های تأخیر بای‌استاتیک در رادارهای MIMO پرداخته می‌شود. در بخش ۳، مسأله مکان‌یابی بیضوی بررسی و دو تخمین‌گر کارا برای حل آن مطرح خواهد شد. در بخش ۴، باند عملکردی کرامر-رائو مربوط به مکان‌یابی بیضوی استخراج خواهد شد. در بخش ۵، با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی عملکرد روش‌های ارائه‌شده را با یکدیگر و باند کرامر-رائو مقایسه نموده و در نهایت، در بخش ۶ به جمع‌بندی و ارائه مسیر تحقیقات پیش‌رو می‌پردازیم.

**نمادها:** مهم‌ترین نمادهای استفاده‌شده در این مقاله به شرح زیر می‌باشد. بردارها، ماتریس‌ها و شاخص‌های اسکالر به ترتیب با حروف کوچک ضخیم، حروف بزرگ ضخیم و حروف کج نمایش داده می‌شوند. نمادهای  $A^T$  و  $A^{-1}$  به ترتیب نشان‌دهنده ترانپوز و معکوس ماتریس  $A$  هستند. نمادهای  $[a]_i$ ،  $[A]_{i,j}$  و  $[A]_{i,:}$  به ترتیب المان  $i$ -ام بردار  $a$ ، المان  $(i, j)$ -ام ماتریس  $A$  و سطر  $i$ -ام ماتریس  $A$  را مشخص می‌کنند. نمادهای  $\text{diag}(a)$  و  $\text{blkdiag}(A_1, \dots, A_N)$  به ترتیب ماتریس قطری متشکل از عنصرهای بردار  $a$  و ماتریس قطری بلوکی متشکل از ماتریس‌های  $A_1, \dots, A_N$  را نشان می‌دهند.  $1_p$  و  $0_p$  بردارهای تمام-یک و تمام-صفر با سایز  $p$  هستند. همچنین،  $I_p$  و  $O_{p \times q}$  به ترتیب نمایش‌دهنده ماتریس همانی  $p \times p$  و ماتریس تمام-صفر  $p \times q$

دریافتی استخراج می‌شود. در حالی که در روش‌های دسته دوم، ابتدا تعدادی اندازه‌گیری از روی سیگنال‌های دریافتی محاسبه شده و سپس با استفاده از این اندازه‌گیری‌ها موقعیت اهداف تخمین زده می‌شود. روش‌های مکان‌یابی مستقیم نسبت به روش‌های دسته دوم دارای برتری‌هایی هستند که مهم‌ترین آن‌ها دقت عملکرد بهتر و عدم نیاز به مرحله انتساب داده‌ها در سناریوهای چند هدفه می‌باشد. این روش‌ها برای تخمین موقعیت اهداف، نیازمند جستجو در فضای چندبعدی هستند و همین امر موجب شده است که به دلیل پیچیدگی زیاد در عمل استفاده چندانی نداشته باشند. تمرکز ما نیز در این مقاله بررسی روش‌های مکان‌یابی غیر مستقیم می‌باشد که به مراتب کاربرد گسترده‌تری در ادبیات رادار و مخابرات و سناریوهای عملیاتی دارند. مهم‌ترین اندازه‌گیری‌های مورد استفاده در مکان‌یابی غیر مستقیم سامانه‌های راداری MIMO شامل زاویه ورود [۱۳-۱۱]، تأخیر بای‌استاتیک [۱۷-۱۴] و شیفت داپلر بای‌استاتیک [۲۶-۱۸] می‌باشد. هر کدام از این اندازه‌گیری‌ها یک مکان هندسی برای هدف مشخص می‌کند که با تجمیع کلیه اندازه‌گیری‌ها و تقاطع مکان‌های هندسی متناظر، می‌توان تخمینی از موقعیت هدف به دست آورد. از میان اندازه‌گیری‌های ذکرشده، روش‌های مبتنی بر اندازه‌گیری تأخیر به دلیل سادگی پیاده‌سازی و دقت مناسب کاربرد بیشتری دارند.

مسأله مکان‌یابی مبتنی بر تأخیر بای‌استاتیک در ادبیات به مکان‌یابی بیضوی موسوم است. در این راستا، در [۱۵] روشی ارائه شده است که در آن معادلات بیضوی مربوط به اندازه‌گیری‌های تأخیر به معادلات هذلولوی تبدیل و در ادامه تخمین موقعیت هدف با استفاده از یک تخمین‌گر حداقل مربعات محاسبه می‌شود. در این روش، تعداد معادلات حاصل نسبت به تعداد اندازه‌گیری‌های در دسترس به صورت قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند که موجب افت عملکرد قابل توجه تخمین (به خصوص در موارد با تعداد حسگر زیاد) می‌شود. در [۱۶]، با استفاده از تبدیلات غیرخطی و تعریف شاخص‌های مزاحم روشی مبتنی بر تخمین حداقل مربعات وزن‌دار ارائه شده است. با این وجود، عملکرد این روش فاصله زیادی با باند کرامر-رائو دارد. در [۱۷]، روشی مبتنی بر تخمین حداقل مربعات چند مرحله‌ای ارائه شده است. در این روش، پس از فرمول‌بندی مسأله تخمین به صورت یک دستگاه شبه‌خطی از موقعیت هدف و شاخص‌های مزاحم برد (از هدف تا هر گیرنده/فرستنده)، شاخص‌های مجهول توسط یک تخمین‌گر حداقل مربعات وزن‌دار تخمین زده می‌شوند. سپس، شاخص‌های مزاحم برد به عنوان اندازه‌گیری‌های فرضی زمان ورود در نظر گرفته شده و از روی اندازه‌گیری‌های حاصل، موقعیت هدف تخمین زده می‌شود. اگرچه این روش عملکرد بهتری نسبت به روش‌های پیشین دارد، در حالت کلی عملکرد آن با حالت

<sup>1</sup> Maximum Likelihood



شکل (۱): نمونه‌ای از یک سناریوی مکان‌یابی بیضوی در فضای دوبعدی.

### ۳- تخمین‌گرهای پیشنهادی

هر کدام از اندازه‌گیری‌های تأخیر بای‌استاتیک یک مکان هندسی بیضوی برای موقعیت هدف مشخص می‌کند که کانون‌های آن فرستنده و گیرنده مربوط به آن اندازه‌گیری هستند. در حالت بدون نویز، موقعیت هدف از تقاطع منحنی‌های بیضوی حاصل از زوج‌های فرستنده-گیرنده مختلف به‌دست می‌آید. در شکل (۱) نمونه‌ای از یک سناریوی مکان‌یابی بیضوی در فضای دو بعدی نمایش داده شده است.

با این وجود، مسأله در حضور نویز پیچیده‌تر خواهد شد و باید به فرم یک مسأله تخمین ML نوشته شود. برای فرمول‌بندی تخمین‌گر ML، نمادهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T, \dots, \mathbf{r}_{N_r}^T]^T, \quad \mathbf{r}_j = [r_{1,j}, \dots, r_{N_r,j}]^T, \\ \boldsymbol{\xi}^o &= [\xi_1^o, \xi_2^o]^T, \\ \xi_1^o &= [R_{t_1}^o, \dots, R_{t_{N_r}}^o]^T, \quad \xi_2^o = [R_{s_1}^o, \dots, R_{s_{N_r}}^o]^T, \\ \mathbf{H} &= [\mathbf{I}_{N_r} \otimes \mathbf{I}_{N_r}, \mathbf{I}_{N_r} \otimes \mathbf{I}_{N_r}]. \end{aligned} \quad (3)$$

با استفاده از نمادهای تعریف‌شده در رابطه (۳)، می‌توان معادله اندازه‌گیری‌های BR ارائه شده در رابطه (۲) را به صورت زیر به فرم ماتریسی بازنویسی کرد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\boldsymbol{\xi}^o + \Delta\mathbf{r}. \quad (4)$$

بر اساس اندازه‌گیری ارائه‌شده در رابطه (۴)، تخمین ML شاخص  $\mathbf{u}^o$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\min_{\mathbf{u}^o} (\mathbf{r} - \mathbf{H}\boldsymbol{\xi}^o)^T \mathbf{Q}_r^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{H}\boldsymbol{\xi}^o) \quad (5)$$

مسأله ML ارائه‌شده در (۵) یک مسأله غیرمحدب بوده و یافتن پاسخ سراسری این مسأله امری دشوار می‌باشد [۲۹]. در واقع، استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکراری با نقطه شروع دلخواه می‌تواند منجر به همگرایی محلی و در نتیجه تخمین نادرست موقعیت شود. در ادامه، روش‌هایی شکل‌بسته با

می‌باشند. نرم اقلیدسی و امید ریاضی به صورت  $\|\cdot\|$  و  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  نشان داده می‌شوند. همچنین، نمادهای  $\otimes$ ،  $\odot$ ،  $\oslash$  به ترتیب نشان‌دهنده ضرب کرونگر، ضرب المان به المان (هادامارد) و تقسیم المان به المان می‌باشند. نماد  $\mathbf{a}^o$  معادل بدون نویز بردار  $\mathbf{a}$  را مشخص کرده و نماد  $\Delta\mathbf{a}$  نشان‌دهنده عبارت نویز/خطای متناظر می‌باشد به گونه‌ای که رابطه  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^o + \Delta\mathbf{a}$  برقرار باشد.

### ۲- مدل‌سازی مسأله

یک سامانه راداری MIMO با  $N_t$  فرستنده و  $N_r$  گیرنده را در نظر بگیرید که موقعیت فرستنده  $\mathbf{t}_i^o$  در فضای سه‌بعدی به ترتیب با  $\mathbf{t}_i = [x_{t_i}, y_{t_i}, z_{t_i}]^T$  و موقعیت گیرنده  $\mathbf{s}_j$  -ام در فضای سه‌بعدی به ترتیب با  $\mathbf{s}_j = [x_{s_j}, y_{s_j}, z_{s_j}]^T$  نشان داده می‌شود. همچنین، موقعیت هدف را به صورت  $\mathbf{u}^o = [x^o, y^o, z^o]^T$  نمایش می‌دهیم. سیگنال ارسال شده توسط فرستنده‌ها پس از انعکاس از هدف توسط هر کدام از گیرنده‌ها جمع‌آوری شده و تعدادی اندازه‌گیری تأخیر بای‌استاتیک از روی آن‌ها استخراج می‌شود. برای استخراج اندازه‌گیری‌های ذکرشده، الگوریتم‌های مناسبی در ادبیات ارائه شده‌اند (به عنوان مثال به [۲۷] و [۲۸] مراجعه ذکرشده در آن‌ها رجوع نمایید). سپس، این اندازه‌گیری‌ها به یک مرکز تلفیق داده ارسال شده و پردازش مکان‌یابی به صورت متمرکز انجام می‌شود. در ادامه، به مدل‌سازی اندازه‌گیری‌های تأخیر بای‌استاتیک در رادارهای MIMO پرداخته می‌شود.

مقدار صحیح اندازه‌گیری تأخیر بای‌استاتیک بین فرستنده  $\mathbf{t}_i^o$  تا گیرنده  $\mathbf{s}_j$  پس از ضرب در سرعت انتشار موج با عنوان بُرد بای‌استاتیک ( $BR^1$ ) شناخته شده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$r_{i,j}^o = R_{t_i}^o + R_{s_j}^o, \quad i=1, \dots, N_t, \quad j=1, \dots, N_r \quad (1)$$

که در آن  $R_{t_i}^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{t}_i\|$  و  $R_{s_j}^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_j\|$  هستند. نسخه نویزی اندازه‌گیری BR به صورت  $r_{i,j} = r_{i,j}^o + \Delta r_{i,j}$  بیان می‌شود که در آن  $\Delta r_{i,j}$  نویز اندازه‌گیری است.

معادلات BR را می‌توان به صورت زیر به شکل ماتریسی نوشت:

$$\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T, \dots, \mathbf{r}_{N_r}^T]^T = \mathbf{r}^o + \Delta\mathbf{r} \quad (2)$$

که در آن  $\mathbf{r}_j = [r_{1,j}, r_{2,j}, \dots, r_{N_r,j}]^T$  می‌باشد و  $\mathbf{r}^o$  و  $\Delta\mathbf{r}$  نیز به صورت مشابه تعریف می‌شوند. بردار نویز  $\Delta\mathbf{r}$  به صورت یک بردار تصادفی گوسی با میانگین صفر و ماتریس کواریانس  $\mathbf{Q}_r$  بیان می‌شود.

<sup>1</sup> Bistatic Range

که در آن  $\mathbf{T}_a = 2\mathbf{I}_{N_r} \otimes \text{diag}\left([R_{t_1}^o, R_{t_2}^o, \dots, R_{t_{N_t}}^o]^T\right)$  است.

تخمین حداقل مربعات متناظر با دستگاه (۹) با کمینه کردن ترکیب وزن دار انرژی خطا  $J = \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \mathbf{W}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a$  نسبت به  $\boldsymbol{\psi}_a^o$  به صورت زیر به دست می‌آید [۲۹]:

$$\boldsymbol{\psi}_a = (\tilde{\mathbf{G}}_a^T \mathbf{W}_a \tilde{\mathbf{G}}_a)^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_a^T \mathbf{W}_a \tilde{\mathbf{h}}_a \quad (11)$$

که در آن  $\mathbf{W}_a = (\mathbb{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^T\})^{-1}$  است. از آنجایی که  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  تابعی غیرخطی از شاخص تصادفی نویز اندازه‌گیری است، محاسبه ماتریس وزن دهی در حالت کلی کاری دشوار است. با این وجود، با فرض نویز کم می‌توان تقریبی خطی از  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  به صورت  $\boldsymbol{\varepsilon}_a \approx \mathbf{T}_a \Delta \mathbf{r}$  ارائه داد. در نتیجه، ماتریس وزن دهی به صورت  $\mathbf{W}_a = (\mathbf{T}_a \mathbf{Q}_r \mathbf{T}_a^T)^{-1}$  محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است که این تقریب با فرض  $R_{t_i}^o \ll |\Delta r_{i,j}|$  به دست آمده است که در حالت‌های نویز اندازه‌گیری کوچک یا واقع شدن هدف در فاصله دور از حسگرها معتبر می‌باشد.

**تذکره ۱:** باید به این نکته توجه کرد که ماتریس وزن دهی  $\mathbf{W}_a$  از طریق  $\mathbf{T}_a$  به شاخص مجهول موقعیت هدف وابسته است. برای رفع این مشکل، در ابتدا تخمینی از موقعیت هدف با جایگذاری  $\mathbf{W}_a = \mathbf{Q}_r^{-1}$  در رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود. سپس از مقدار تخمینی موقعیت هدف  $\mathbf{u}^o$  برای محاسبه دقیق‌تر ماتریس وزن دهی استفاده می‌کنیم. در ادامه، تخمین حداقل مربعات ارائه شده در (۱۱) را مجدداً با ماتریس وزن دهی جدید تکرار می‌کنیم. لازم به ذکر است که تخمین ماتریس وزن دهی به این صورت امری متداول در ادبیات تخمین است و در برخی منابع از جمله [۳۰، ۳۱] نشان داده شده است که افت عملکرد ناشی از این تقریب قابل چشم‌پوشی است.

در ادامه قصد داریم عبارت خطای تخمین مرحله نخست را محاسبه کنیم. با نوشتن  $\boldsymbol{\psi}_a^o$  به صورت  $\boldsymbol{\psi}_a^o = (\tilde{\mathbf{G}}_a^T \mathbf{W}_a \tilde{\mathbf{G}}_a)^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_a^T \mathbf{W}_a \tilde{\mathbf{h}}_a$  و استفاده از رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_a := \boldsymbol{\psi}_a - \boldsymbol{\psi}_a^o = (\tilde{\mathbf{G}}_a^T \mathbf{W}_a \tilde{\mathbf{G}}_a)^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_a^T \mathbf{W}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a. \quad (12)$$

با تقریب  $\Delta \boldsymbol{\psi}_a$  تا جملات خطی نویز خواهیم داشت  $\mathbb{E}\{\Delta \boldsymbol{\psi}_a\} \approx \mathbf{0}_{N_r+3}$  که نشان می‌دهد که تخمین گر مرحله نخست در نویزهای کم یک تخمین گر بدون بایاس است. همچنین، ماتریس کواریانس تخمین  $\boldsymbol{\psi}_a$  به صورت زیر قابل تقریب می‌باشد [۲۹]:

$$\text{cov}(\boldsymbol{\psi}_a) = \mathbb{E}\{\Delta \boldsymbol{\psi}_a \Delta \boldsymbol{\psi}_a^T\} \approx (\tilde{\mathbf{G}}_a^T \mathbf{W}_a \tilde{\mathbf{G}}_a)^{-1}. \quad (13)$$

**مرحله دوم:** با توجه به رابطه  $R_{s_j}^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_j\|$

پیچیدگی پائین معرفی خواهد شد که در نویزهای کم عملکرد بهینه داشته و تقریب مناسبی از تخمین گر ML ارائه خواهند داد.

### ۳-۱- تخمین گر حداقل مربعات وزن دار چند مرحله‌ای

در این قسمت، یک تخمین گر شکل‌بسته برای تخمین موقعیت هدف ارائه خواهد شد که مبتنی بر تبدیل مسأله ML غیرخطی (۵) به یک مسأله شبه خطی با توان دو رسانی و تعریف شاخص‌های مزاحم می‌باشد. این روش دارای ساختار دو مرحله‌ای است که در هر مرحله آن از یک تخمین حداقل مربعات وزن دار استفاده می‌شود. مراحل تخمین گر پیشنهادی به شرح زیر است:

**مرحله نخست:** ابتدا رابطه مربوط به تعریف  $r_{i,j}^o$  در (۱) را به صورت  $R_{s_j}^o - R_{t_i}^o = r_{i,j}^o$  بازنویسی می‌کنیم. در صورتی که دو طرف این رابطه را به توان دو رسانده و مقادیر  $R_{s_j}^o$  و  $R_{t_i}^o$  را از تعریف جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$2(\mathbf{s}_j - \mathbf{t}_i)^T \mathbf{u}^o + 2r_{i,j}^o R_{s_j}^o = r_{i,j}^{o2} + \|\mathbf{s}_j\|^2 - \|\mathbf{t}_i\|^2. \quad (6)$$

با تجمیع معادله (۶) برای  $i = 1, 2, \dots, N_t$  و  $j = 1, 2, \dots, N_r$  خواهیم رسید:

$$\mathbf{h}_a = \mathbf{G}_a \boldsymbol{\psi}_a^o \quad (7)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_a^o &= [\mathbf{u}^{oT}, R_{s_1}^o, R_{s_2}^o, \dots, R_{s_{N_r}}^o]^T, \\ \mathbf{h}_a &= [\mathbf{h}_{a,1}^T, \mathbf{h}_{a,2}^T, \dots, \mathbf{h}_{a,N_r}^T]^T, \\ \mathbf{h}_{a,j} &= [r_{1,j}^{o2} + \|\mathbf{s}_j\|^2 - \|\mathbf{t}_1\|^2, r_{2,j}^{o2} + \|\mathbf{s}_j\|^2 - \|\mathbf{t}_2\|^2, \\ &\quad \dots, r_{N_t,j}^{o2} + \|\mathbf{s}_j\|^2 - \|\mathbf{t}_{N_t}\|^2]^T, \\ \mathbf{G}_a &= [\mathbf{G}_{a,1}^T, \mathbf{G}_{a,2}^T, \dots, \mathbf{G}_{a,N_r}^T]^T, \\ \mathbf{G}_{a,j} &= 2 \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_j - \mathbf{t}_1)^T & \mathbf{0}_{j-1}^T & r_{1,j}^o & \mathbf{0}_{N_r-j}^T \\ (\mathbf{s}_j - \mathbf{t}_2)^T & \mathbf{0}_{j-1}^T & r_{2,j}^o & \mathbf{0}_{N_r-j}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{s}_j - \mathbf{t}_{N_t})^T & \mathbf{0}_{j-1}^T & r_{N_t,j}^o & \mathbf{0}_{N_r-j}^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

به دلیل وجود نویز در اندازه‌گیری‌های BR، مقادیر صحیح  $\mathbf{h}_a$  و  $\mathbf{G}_a$  در دسترس نیستند و باید از نسخه‌های نویزی آن‌ها (که با  $\tilde{\mathbf{h}}_a$  و  $\tilde{\mathbf{G}}_a$  نمایش می‌دهیم) استفاده کرد. با جایگذاری شاخص‌های نویزی در رابطه (۷) و بیان تفاضل دو طرف معادله به صورت  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ ، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \tilde{\mathbf{h}}_a - \tilde{\mathbf{G}}_a \boldsymbol{\psi}_a^o. \quad (9)$$

پس از مقداری ساده‌سازی جبری،  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \mathbf{T}_a \Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \square \Delta \mathbf{r} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b \approx \mathbf{T}_b \Delta \boldsymbol{\psi}_a \quad (19)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{T}_b = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_b^{(1,1)} & \mathbf{T}_b^{(1,2)} \\ \mathbf{T}_b^{(2,1)} & \mathbf{T}_b^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{T}_b^{(1,1)} = \text{diag}([\boldsymbol{\psi}_a^o]_{1:3}), \mathbf{T}_b^{(1,2)} = \mathbf{O}_{3 \times N_r},$$

$$\mathbf{T}_b^{(2,1)} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{N_r}]^T, \mathbf{T}_b^{(2,2)} = \text{diag}([\boldsymbol{\psi}_a^o]_{4:N_r+3}).$$

تخمین حداقل مربعات وزن‌دار متناظر با دستگاه (۱۷) به صورت زیر به دست می‌آید [۲۹]:

$$\boldsymbol{\psi}_b = (\mathbf{G}_b^T \mathbf{W}_b \mathbf{G}_b)^{-1} \mathbf{G}_b^T \mathbf{W}_b \tilde{\mathbf{h}}_b \quad (21)$$

که ماتریس وزن‌دهی بهینه برابر است با:

$$\mathbf{W}_b = \mathbb{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^T\}^{-1} \\ = (\mathbf{T}_b \text{cov}(\boldsymbol{\psi}_a) \mathbf{T}_b^T)^{-1} \quad (22) \\ = \mathbf{T}_b^{-T} \mathbf{G}_a^T \mathbf{W}_a \mathbf{G}_a \mathbf{T}_b^{-1}.$$

تخمین نهایی موقعیت هدف با استفاده از یک نگاهت روی تخمین مرحله دوم به دست می‌آید:

$$\mathbf{u} = \text{sgn}([\boldsymbol{\psi}_a]_{1:3}) \square \sqrt{\boldsymbol{\psi}_b} \quad (23)$$

که در آن  $\text{sgn}(\cdot)$  بیان‌گر تابع علامت می‌باشد و برای رفع ابهام علامت ناشی از اعمال ریشه دوم قرار داده شده است. به عنوان جمع‌بندی، شبه‌کد این روش به عنوان الگوریتم (۱) آورده شده است.

الگوریتم ۱. شبه‌کد تخمین‌گر حداقل مربعات وزن‌دار چندمرحله‌ای.

۱- تخمینی از موقعیت هدف با جایگذاری ماتریس وزن‌دهی به صورت  $\mathbf{W}_a = \mathbf{Q}_r^{-1}$  در رابطه (۱۱) محاسبه کنید.

۲- از مقدار تخمینی موقعیت هدف  $\mathbf{u}^o$  برای محاسبه دقیق‌تر ماتریس وزن‌دهی به صورت  $\mathbf{W}_a = (\mathbf{T}_a \mathbf{Q}_r \mathbf{T}_a^T)^{-1}$  استفاده کرده و تخمین حداقل مربعات وزن‌دار ارائه شده در (۱۱) را مجدداً با ماتریس وزن‌دهی جدید تکرار نمایید.

۳- از رابطه (۲۱)، تخمین حداقل مربعات وزن‌دار مربوط به شاخص  $\boldsymbol{\psi}_b$  را محاسبه نمایید.

۴- از رابطه (۲۳) تخمین نهایی موقعیت هدف را با نگاهت روی شاخص  $\boldsymbol{\psi}_b$  محاسبه نمایید.

### ۲-۳- پاسخ دقیق مسأله حداقل مربعات مقید

در این بخش، مسأله ML غیرمحدب به شکل یک مسأله محدب، که پاسخ سراسری آن با پیچیدگی بسیار کم به صورت تقریباً شکل‌بسته قابل حصول است، بازنویسی خواهد شد. اگرچه مسأله

شاخص‌های مزاحم تخمین‌زده شده در  $\boldsymbol{\psi}_a^o$  (یعنی  $R_{s_j}^o$ ها) به  $\mathbf{u}^o$  وابسته هستند؛ در حالی که این قیدها در تخمین مرحله نخست به منظور ایجاد یک فرمول‌بندی خطی شکل‌بسته نادیده گرفته شده‌اند. در این مرحله قصد داریم از رابطه ذاتی بین شاخص‌های تخمینی مرحله نخست برای بهبود دقت تخمین‌گر و رسیدن به باند عملکردی کرامر-رائو استفاده کنیم.

در ادامه، تعداد  $N_r + 3$  معادله خطی جدید برای در نظر گرفتن ارتباط بین شاخص‌های ذکر شده تشکیل خواهد شد. برای تشکیل یک دستگاه خطی، بردار شاخص‌های تخمینی مرحله دوم  $\boldsymbol{\psi}_b^o$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{\psi}_b^o = \mathbf{u}^o \square \mathbf{u}^o. \quad (14)$$

با جایگذاری  $\mathbf{u}^o = [\boldsymbol{\psi}_a^o]_{1:3}$  در معادله (۱۴) و استفاده از رابطه  $[\boldsymbol{\psi}_a^o]_{1:3} = [\boldsymbol{\psi}_a]_{1:3} - [\Delta \boldsymbol{\psi}_a]_{1:3}$  تعداد ۳ معادله جدید به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\psi}_b^o = [\boldsymbol{\psi}_a]_{1:3} \square [\boldsymbol{\psi}_a]_{1:3} - 2[\boldsymbol{\psi}_a^o]_{1:3} \square [\Delta \boldsymbol{\psi}_a]_{1:3} \quad (15)$$

که در آن از جملات مرتبه دوم خطا در برابر جملات خطی آن صرف نظر شده است.

در ادامه، با در نظر گرفتن رابطه‌های  $R_{s_j}^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_j\|^2$  برای  $j = 1, 2, \dots, N_r$  پس از به توان دو رساندن طرفین رابطه فوق، جایگذاری  $\mathbf{u}^o = [\boldsymbol{\psi}_a^o]_{1:3}$  و  $R_{s_j}^o = [\boldsymbol{\psi}_a^o]_{j+3}$  از رابطه  $\boldsymbol{\psi}_a^o = \boldsymbol{\psi}_a - \Delta \boldsymbol{\psi}_a$  برای  $j = 1, 2, \dots, N_r$  خواهیم داشت:

$$2\mathbf{s}_j^T [\boldsymbol{\psi}_a]_{1:3} - \|\mathbf{s}_j\|^2 + [\boldsymbol{\psi}_a]_{j+3} - \mathbf{1}_3^T \boldsymbol{\psi}_b^o \\ = 2\mathbf{s}_j^T [\Delta \boldsymbol{\psi}_a]_{1:3} + 2[\boldsymbol{\psi}_a^o]_{j+3} [\Delta \boldsymbol{\psi}_a]_{j+3} \quad (16)$$

که در آن از جملات مرتبه دوم خطا صرف نظر شده است.

معادلات (۱۵) و (۱۶) به صورت زیر به فرم ماتریسی نمایش داده می‌شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \tilde{\mathbf{h}}_b - \mathbf{G}_b \boldsymbol{\psi}_b^o, \quad (17)$$

که در آن  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$  بردار خطای مرحله دوم می‌باشد. همچنین،

$$\tilde{\mathbf{h}}_b = \boldsymbol{\psi}_a \square \boldsymbol{\psi}_a + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ 2\mathbf{s}_1^T [\boldsymbol{\theta}_a]_{1:3} - \|\mathbf{s}_1\|^2 \\ \vdots \\ 2\mathbf{s}_{N_r}^T [\boldsymbol{\theta}_a]_{1:3} - \|\mathbf{s}_{N_r}\|^2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{G}_b = [\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_3, \dots, \mathbf{1}_3]^T.$$

با توجه به مقادیر نویزی در روابط (۱۵) و (۱۶)، بردار خطای  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$  در سمت چپ معادله (۱۷) به صورت زیر به دست می‌آید:

جایگذاری  $\mathbf{W} = \mathbf{Q}_T^{-1}$  در معادله (۲۷) یک تخمین اولیه از  $\mathbf{u}^o$  به دست آورده و سپس از این مقدار تخمینی برای محاسبه دقیق تر ماتریس وزن دهی  $\mathbf{W}$  برای استفاده در رابطه (۲۴) بهره می‌بریم.

با تعریف  $\bar{\boldsymbol{\psi}}^o$  به صورت  $\bar{\boldsymbol{\psi}}^o = \boldsymbol{\psi}^o - \mathbf{a}$  می‌توان مسئله بهینه‌سازی (۲۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\boldsymbol{\psi}}^o} \quad & \bar{\boldsymbol{\psi}}^{oT} \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\psi}}^o - 2\mathbf{b}^T \bar{\boldsymbol{\psi}}^o \\ \text{s.t.} \quad & \bar{\boldsymbol{\psi}}^{oT} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\psi}}^o = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن  $\mathbf{A} = \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G}$  و  $\mathbf{b} = \mathbf{G}^T \mathbf{W} (\mathbf{h} - \mathbf{G} \mathbf{a})$  می‌باشد.

اگرچه مسئله (۲۸) به ظاهر همچنان غیرمحدب است، در ادامه نشان خواهیم داد که پاسخ دقیق این مسئله به صورت کارآمد قابل حصول است. لازم به ذکر است که (۲۸) یک مسئله QCQP<sup>۱</sup> با یک قید تساوی مربعی است که به دسته‌ای از این مسائل با عنوان GTRS<sup>۲</sup> تعلق دارد [۳۲]. این دسته از مسائل شرایط لازم و کافی بهینگی را برآورده می‌کنند و پاسخ سراسری آن‌ها را می‌توان در زمان چندجمله‌ای محاسبه کرد [۳۳، ۳۲].

از آنجایی که  $\mathbf{A}$  یک ماتریس مثبت معین است، می‌توان ماتریس‌های  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{C}$  را به صورت همزمان در یک پایه قطری کرد. به عبارت دیگر، ماتریس ناویژه  $\mathbf{P}$  وجود دارد به گونه‌ای که [۳۴، ۶، ۱] قضیه:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P}^T \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{P}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{P}^T \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{P} \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_4]^T \in \mathbb{R}^4$  و  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_4]^T \in \mathbb{R}^4$  است.

لازم به ذکر است که روش‌های گوناگونی برای قطری کردن همزمان دو ماتریس در ریاضیات ارائه شده است که عموماً بر پایه تجزیه مقادیر ویژه هستند (به عنوان مثال می‌توان از روش ارائه شده در [۳۵] برای قطری‌سازی استفاده نمود).

در ادامه، متغیرهای  $\boldsymbol{\gamma}$  و  $\mathbf{q}^o$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_4]^T := \mathbf{P}^{-T} \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4, \\ \mathbf{q}^o &= [q_1^o, q_2^o, \dots, q_4^o]^T := \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\psi}}^o \in \mathbb{R}^4. \end{aligned} \quad (30)$$

پس از جایگذاری نسخه قطری شده  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{C}$  از رابطه (۲۹) در (۲۸) و استفاده از تعریف‌های ارائه شده در رابطه (۳۰)، مسئله (۲۸) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q}^o} \quad & \mathbf{q}^{oT} \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{q}^o - 2\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{q}^o \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{q}^{oT} \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{q}^o = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

حاصل همچنان غیرمحدب است، ولی در این بخش نشان خواهیم داد که این مسئله دارای تحدب مخفی بوده و می‌توان آن را به شکل یک مسئله معادل محدب نوشت.

مسئله ML ارائه شده در (۵) را می‌توان به صورت مسئله حداقل مربعات وزن دار مقید زیر تقریب زد:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\psi}^o} \quad & (\mathbf{h} - \mathbf{G} \boldsymbol{\psi}^o)^T \mathbf{W} (\mathbf{h} - \mathbf{G} \boldsymbol{\psi}^o) \\ \text{s.t.} \quad & (\boldsymbol{\psi}^o - \mathbf{a})^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\psi}^o - \mathbf{a}) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن داریم:

$$\boldsymbol{\psi}^o = [\mathbf{u}^{oT}, R_{s_i}^o]^T, \mathbf{a} = [\mathbf{s}_1^T, 0]^T \quad (\text{الف-25})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= [\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T, \dots, \mathbf{h}_{N_r}^T]^T \\ [\mathbf{h}_i]_i &= \|\mathbf{s}_i\|^2 - \|\mathbf{t}_i\|^2 + r_{i,1}^2, \quad i = 1, 2, \dots, N_r \end{aligned} \quad (\text{ب-25})$$

$$[\mathbf{h}_j]_j = \|\mathbf{s}_j\|^2 - \|\mathbf{s}_i\|^2 - (r_{i,j} - r_{i,1})^2, \quad i = 1, 2, \dots, N_r, \quad j = 2, 3, \dots, N_r$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [\mathbf{G}_1^T, \mathbf{G}_2^T, \dots, \mathbf{G}_{N_r}^T]^T \\ [\mathbf{G}_i]_{i,j} &= 2[\mathbf{s}_i^T - \mathbf{t}_i^T, r_{i,1}], \quad i = 1, 2, \dots, N_r \end{aligned} \quad (\text{ج-25})$$

$$[\mathbf{G}_j]_{i,j} = 2[\mathbf{s}_j^T - \mathbf{s}_i^T, r_{i,j} - r_{i,1}], \quad i = 1, 2, \dots, N_r, \quad j = 2, 3, \dots, N_r$$

$$\mathbf{C} = \text{diag}([\mathbf{I}_3^T, -1]^T) \quad (\text{د-25})$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{B} \mathbf{Q}_r \mathbf{B}^T)^{-1}. \quad (\text{ه-25})$$

همچنین، ماتریس  $\mathbf{B}$  در رابطه (۳۰) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_1 &= \text{diag}([R_{t_1}^o, R_{t_2}^o, \dots, R_{t_{N_r}}^o]^T), \\ \mathbf{B}_2 &= \mathbf{O}_{N_r \times (N_r - 1)N_r}, \\ \mathbf{B}_3 &= [R_{s_2}^o \mathbf{I}_{N_r}, R_{s_3}^o \mathbf{I}_{N_r}, \dots, R_{s_{N_r}}^o \mathbf{I}_{N_r}]^T, \\ \mathbf{B}_4 &= -\text{blkdiag}(R_{s_2}^o \mathbf{I}_{N_r}, R_{s_3}^o \mathbf{I}_{N_r}, \dots, R_{s_{N_r}}^o \mathbf{I}_{N_r}). \end{aligned} \quad (26)$$

جزئیات استخراج مسئله (۲۴) در پیوست (الف) آورده شده است.

تذکر ۲: لازم به ذکر است که ماتریس وزن دهی  $\mathbf{W}$  از طریق  $\mathbf{B}$  به شاخص مجهول موقعیت هدف وابسته است. به منظور محاسبه یک تخمین اولیه از موقعیت هدف  $\mathbf{u}^o$  می‌توان قید مسئله (۳۱) را آزاد کرده و تخمین موقعیت هدف را با استفاده از یک تخمین گر حداقل مربعات وزن دار غیر مقید به صورت زیر به دست آورد [۲۹]:

$$\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{h}. \quad (27)$$

البته، ماتریس وزن دهی در این مسئله نیز همان مشکل وابستگی به شاخص مجهول موقعیت هدف را دارد. لذا، در ابتدا با

<sup>1</sup> Quadratically Constrained Quadratic Programming

<sup>2</sup> Generalized Trust Region Subproblem

مسئله (۳۱) را می‌توان به صورت معادل به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q}^o} \quad & \sum_{n=1}^4 \alpha_n q_n^{o2} - 2\gamma_n q_n^o \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{n=1}^4 \beta_n q_n^{o2} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

مسئله (۳۲) همچنان به ظاهر غیرمحدب است؛ ولی، با یک تغییر متغیر می‌توان آن را به صورت زیر به شکل یک مسئله محدب بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{m}^o} \quad & \alpha^T \mathbf{m}^o - 2|\gamma|^T \sqrt{\mathbf{m}^o} \\ \text{s.t.} \quad & \beta^T \mathbf{m}^o = 0 \\ & \mathbf{m}^o \geq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن  $\mathbf{m}^o = [m_1^o, \dots, m_4^o]^T := \mathbf{q}^o \odot \mathbf{q}^o$  است. نمادهای  $\|\cdot\|$  و  $\sqrt{\cdot}$  به ترتیب نشان‌دهنده اپراتورهای المان به المان قدرمطلق و ریشه دوم هستند. توجه شود که برای کمینه کردن تابع هزینه در مسئله (۳۲)، علامت  $q_n^o$  باید مشابه  $\gamma_n$  باشد تا علامت کلی عبارت  $\gamma_n q_n^o$  نامنفی شود. در نتیجه، مسائل (۳۲) و (۳۳) کاملاً معادل هستند. پس از حل مسئله (۳۳)، پاسخ دقیق (۳۴)، یعنی  $\psi$ ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi = \mathbf{P}^{-1} \Lambda \sqrt{\mathbf{m}} + \mathbf{a} \quad (34)$$

که در آن  $\Lambda = \text{diag}(\text{sgn}(\gamma))$  است،  $\mathbf{m}$  پاسخ مسئله (۳۳) بوده و بردار  $\mathbf{a}$  در رابطه (۲۵-الف) تعریف شده است. نماد  $\text{sgn}(\cdot)$  نشان‌دهنده تابع علامت المان به المان است. در نهایت، موقعیت تخمینی هدف به صورت  $\mathbf{u} = [\psi]_{1:3}$  محاسبه می‌شود.

**تذکر ۳:** مسئله بهینه‌سازی محدب (۳۳) را می‌توان با استفاده از ابزارهای بهینه‌سازی مانند CVX [۳۶] حل کرد. با این وجود، بر اساس ساختار خاص این مسئله، در ادامه یک الگوریتم با پیچیدگی بسیار کم ارائه خواهد شد که پاسخ سراسری این مسئله را به صورت تقریباً شکل‌بسته به دست می‌آورد.

**قضیه:** پاسخ سراسری مسئله (۳۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_n = \begin{cases} \frac{\gamma_n^2}{(\alpha_n - \lambda \beta_n)^2} & n \in \mathcal{C} \\ 0 & n \notin \mathcal{C} \end{cases} \quad (35)$$

که در آن مجموعه  $\mathcal{C}$  در رابطه (۳۸) تعریف شده است. همچنین،  $\lambda$  یک ریشه از چندجمله‌ای‌هایی به شکل زیر است که اولاً حقیقی باشد و ثانیاً کمترین مقدار تابع هزینه را در میان مجموعه ریشه‌های ذکر شده داشته باشد:

$$P(\lambda) = \sum_{n \in \mathcal{C}} \beta_n \gamma_n^2 \prod_{l \neq n} (\alpha_l - \lambda \beta_l)^2. \quad (36)$$

**اثبات:** برای محاسبه پاسخ سراسری مسئله (۳۳)، شرایط

KKT<sup>۱</sup> را به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\alpha - |\gamma| \odot \sqrt{\mathbf{m}^o} - \lambda \beta - \mu = \mathbf{0}_4, \quad (37\text{-الف})$$

$$\beta^T \mathbf{m}^o = 0, \quad (37\text{-ب})$$

$$\mathbf{m}^o \geq \mathbf{0}_4, \quad (37\text{-ج})$$

$$\mu \square \mathbf{m}^o = \mathbf{0}_4. \quad (37\text{-د})$$

که در آن  $\lambda \in \mathbb{R}$  و  $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_4]^T \in \mathbb{R}^4$  می‌باشند.

مجموعه  $\mathcal{C}$  را به عنوان مجموعه‌ای تعریف می‌شود که برای اعضای آن قید (۳۷-ج) فعال نباشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\mathcal{C} = \{n | 1 \leq n \leq 4, \mu_n = 0\}. \quad (38)$$

با توجه به قید (۳۷-الف)، برای اعضای مجموعه  $\mathcal{C}$  خواهیم داشت:

$$m_n = \frac{\gamma_n^2}{(\alpha_n - \lambda \beta_n)^2}. \quad (39)$$

در غیر این صورت، با توجه به رابطه (۳۷-د)، مقدار  $m_n$  باید برابر صفر باشد.

با جایگزین کردن  $m_n$  از رابطه (۳۹) در قید (۳۷-ب)، خواهیم داشت:

$$\sum_{n \in \mathcal{C}} \beta_n \gamma_n^2 \prod_{l \neq n} (\alpha_l - \lambda \beta_l)^2 = 0 \quad (40)$$

که این موضوع، اثبات را تکمیل می‌کند.

در نتیجه، مسئله بهینه‌سازی به مسئله ساده محاسبه ریشه‌های تعدادی چندجمله‌ای تبدیل می‌شود. توجه شود که از بین ۱۶ انتخاب مختلفی که برای تشکیل مجموعه  $\mathcal{C}$  می‌توان متصور بود، تنها تعداد کمی از آن‌ها از نظر عملی معنادار هستند. در واقع، از معادله (۳۴) می‌توان دریافت که رابطه  $m_n$  منجر به  $[\psi]_n = [\mathbf{a}]_n$  می‌شود. در نتیجه، هنگامی که  $\mathbf{u} = \mathbf{s}_1$  و یا  $m_4 = 0$  و  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$  که در عمل چنین اتفاقی ممکن نیست. بر این اساس، برای مکان‌یابی سه‌بعدی باید ریشه‌های یک چندجمله‌ای درجه ۶، سه چندجمله‌ای درجه ۴ و سه چندجمله‌ای درجه ۲ محاسبه شود. لازم به ذکر است که ریشه‌های چندجمله‌ای‌های تا مرتبه ۴ به صورت شکل‌بسته قابل محاسبه هستند و برای محاسبه ریشه‌های چندجمله‌ای درجه ۶ می‌توان از روش‌های کارآمد محاسبه ریشه مانند تابع roots در متلب استفاده نمود.

<sup>۱</sup> Karush Kuhn Tucker

روش از مرتبه  $O((N_t N_r)^3)$  می‌باشد. لازم به ذکر است که پیچیدگی محاسباتی روش‌های [۱۶] و [۱۷] نیز از مرتبه  $O((N_t N_r)^3)$  می‌باشد.

بار محاسباتی غالب الگوریتم ۲ مربوط به مراحل ۳ و ۴ می‌باشد. الگوریتم قطری‌سازی همزمان ارائه شده در [۳۵] مبتنی بر تجزیه مقادیر ویژه یک ماتریس  $(N + 1) \times (N + 1)$  بوده و پیچیدگی آن از مرتبه  $O(N^3)$  می‌باشد که در آن  $N$  بعد فضای مکان‌یابی بوده و در اینجا برابر ۳ می‌باشد. پیچیدگی مرحله ۴ مربوط به محاسبه ریشه چندجمله‌ای‌هایی با درجه حداکثر ۶ می‌باشد. از آنجایی که محاسبه ریشه چندجمله‌ای توسط تابع roots در Matlab مبتنی بر تجزیه مقادیر ویژه ماتریس ضرایب متناظر با چندجمله‌ای می‌باشد، پیچیدگی این مرحله از مرتبه  $O(N^3)$  است. در نتیجه، پیچیدگی کلی این روش نیز از مرتبه  $O(N^3)$  است.

#### ۴- باند عملکردی کرامر-رائو

باند کرامر-رائو یک حد پایین برای کواریانس هر تخمین‌گر بدون بایاس مشخص می‌کند. روش‌های مکان‌یابی ارائه‌شده در بخش قبل، در سطح نویز کم تخمین‌گرهایی تقریباً بدون بایاس هستند. در نتیجه، باند کرامر-رائو را می‌توان به عنوان یک معیار عملکردی برای بررسی عملکرد روش‌های ارائه‌شده در نظر گرفت. در ادامه، این باند برای مکان‌یابی مبتنی بر تأخیر بای‌استاتیک ارائه خواهد شد.

در مسأله مکان‌یابی ارائه‌شده در بخش ۳، شاخص تخمینی  $\mathbf{u}^0$  است. تحت نویز گوسی، باند کرامر-رائوی  $\mathbf{u}^0$  به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۹]:

$$\text{CRLB}(\mathbf{u}^0) = \left( \nabla_{\mathbf{r}^0, \mathbf{u}^0}^T \mathbf{Q}_r^{-1} \nabla_{\mathbf{r}^0, \mathbf{u}^0} \right)^{-1} \quad (41)$$

که در آن  $\nabla_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$  بیانگر مشتق جزئی  $\mathbf{a}$  نسبت به  $\mathbf{b}$  است.  $\nabla_{\mathbf{r}^0, \mathbf{u}^0}$  یک ماتریس  $3 \times N_t N_r$  می‌باشد که سطر  $k$ -ام آن به صورت زیر داده شده است:

$$\left[ \nabla_{\mathbf{r}^0, \mathbf{u}^0} \right]_{k,i} = \rho_{\mathbf{u}^0, t_i}^T + \rho_{\mathbf{u}^0, s_j}^T \quad (42)$$

که در آن  $\rho_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) / \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$  بوده و اندیس  $k$  به صورت  $k = (j - 1) N_t + i$  برای  $i = 1, 2, \dots, N_t$  و  $j = 1, 2, \dots, N_r$  تعریف می‌شود.

#### ۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، از شبیه‌سازی‌های عددی به منظور ارزیابی عملکرد روش‌های ارائه‌شده استفاده می‌شود. در کلیه موارد (غیر از

**تذکر ۴:** با توجه به وسعت زیاد محدوده پوشش در کاربردهای راداری و همچنین چیدمان توزیع‌یافته آنتن‌های رادار در این ناحیه، احتمال اینکه هر کدام از مان‌های مختصات هدف دقیقاً برابر یا گیرنده مرجع باشد، بسیار کم است. در نتیجه، محاسبه ریشه‌ها برای یک چندجمله‌ای مرتبه ۶ کفایت می‌کند.

پس از محاسبه همه گزینه‌ها برای  $\lambda$  و حذف گزینه‌های غیرحقیقی، شاخص معادل  $\mathbf{m}$  که به ازای آن تابع هزینه کمترین مقدار خود را از میان گزینه‌ها داشته باشد، به عنوان پاسخ سراسری مسأله (۳۳) انتخاب می‌شود.

به عنوان جمع‌بندی، شبه‌کد این روش به عنوان الگوریتم (۲) آورده شده است.

**الگوریتم (۲):** شبه‌کد پاسخ دقیق تخمین حداقل مربعات وزن‌دار مقید.

- ۱- تخمین اولیه‌ای از موقعیت هدف با جایگذاری  $\mathbf{W} = \mathbf{Q}_r^{-1}$  در معادله (۲۷) محاسبه کنید.
- ۲- از تخمین انجام‌شده در مرحله قبل به منظور محاسبه ماتریس وزن‌دهی از رابطه (۲۵-۵) استفاده نموده و مسأله (۲۴) را با استفاده از این ماتریس وزن‌دهی فرمول‌بندی نمایید.
- ۳- ماتریس‌های  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{C}$  را به صورت همزمان قطری کرده و مسأله محدب (۳۳) را فرمول‌بندی نمایید.
- ۴- موارد کاندید برای شاخص  $\lambda$  را با محاسبه ریشه چندجمله‌ای‌هایی به فرم (۳۶) پیدا نمایید.
- ۵- پس از حذف کاندیدهای غیرحقیقی برای  $\lambda$ ، شاخص معادل  $\mathbf{m}$  که به ازای آن تابع هزینه کمترین مقدار خود را از میان گزینه‌ها داشته باشد، به عنوان پاسخ سراسری مسأله (۳۳) انتخاب نمایید.
- ۶- پاسخ دقیق مسأله (۲۴) را از رابطه (۳۴) محاسبه نموده و از روی آن موقعیت تخمینی هدف را به صورت  $\mathbf{u} = [\psi]_{1:3}$  محاسبه نمایید.

#### ۳-۳- پیچیدگی محاسباتی

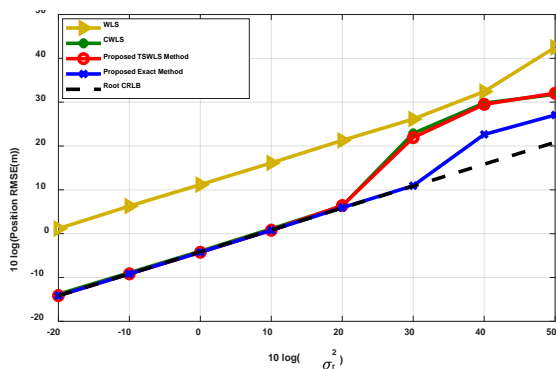
در این قسمت، پیچیدگی محاسباتی روش‌های ارائه‌شده بررسی می‌شود. برای این کار، تعداد ضرب‌های مورد نیاز به عنوان معیار در نظر گرفته می‌شود.

برای الگوریتم (۱)، با احتساب محاسبات ماتریسی برای محاسبه ماتریس‌های وزن‌دهی و محاسبه تخمین حداقل مربعات وزن‌دار در هر دو مرحله و نکاشت نهایی، تعداد ضرب‌های مورد نیاز برابر مقدار  $3(N_t N_r)^2 + (N_t N_r)^2 (N_t + 3) + 2N_t N_r (N_t + 3)^2 + N_t N_r (N_t + 3) + 4(N_t + 3)^2 + 3(N_t + 3)^2 + 21(N_t + 3) + 27$  خواهد بود که با فرض  $1 \gg N_t N_r$ ، پیچیدگی محاسباتی این



در نظر می‌گیریم که در آن  $\sigma_n^2$  نشان‌دهنده واریانس نویز اندازه‌گیری‌ها است. در ادامه، عملکرد موقعیت‌یابی روش‌های پیشنهادی را با باند کرامر-رائو و روش‌های موجود در ادبیات مکان‌یابی راداری مقایسه می‌کنیم. برای این کار، روش‌های حداقل مربعات وزن‌دار (WLS<sup>۲</sup>) [۱۶] و حداقل مربعات وزن‌دار دایروی (CWLS<sup>۳</sup>) [۱۷] در نظر گرفته خواهند شد.

سناریوی ۱: در این سناریو، قصد داریم که عملکرد موقعیت‌یابی را به صورت تابعی از واریانس نویز ارزیابی کنیم. برای این کار، دو حالت هدف نزدیک و هدف دور را در نظر می‌گیریم. در حالت نخست، یک هدف نزدیک واقع در  $\mathbf{u}^0 = [4000, 4000, 1000]^T$  متر را در نظر می‌گیریم. در شکل (۲)، RMSE تخمین‌گرهای ارائه‌شده را با روش‌های موجود در ادبیات و باند کرامر-رائو مقایسه کردیم. همانگونه که در شکل (۲) نشان داده شده است، هر دو روش ارائه‌شده در نویز کم از نظر عملکردی به باند کرامر-رائو می‌رسند. با افزایش سطح نویز، عملکرد روش حداقل مربعات وزن‌دار دو مرحله‌ای (TSWLS<sup>۴</sup>) زودتر از باند فاصله می‌گیرد. این موضوع به دلیل تقریب‌های صورت‌گرفته در استخراج این روش و انتشار خطای بین مرحله اول و دوم تخمین‌گر می‌باشد. از طرف دیگر، روش دوم (Exact) تا سطوح نسبتاً بالای نویز عملکرد بهینه خود را حفظ می‌کند. به طور خاص، عملکرد روش دوم تا سطح نویز حدود ۳۰ dB برابر با باند کرامر-رائو است؛ در حالی که روش نخست به دلیل اثر آستانه در سطح نویز ۲۰ dB از باند فاصله می‌گیرد. همچنین، مشاهده می‌شود که تخمین‌گرهای پیشنهادی عملکرد بهتری از روش‌های موجود در ادبیات دارند. به‌طور خاص، عملکرد روش WLS با باند کرامر-رائو فاصله زیادی دارد. روش CWLS نیز اگرچه از نظر عملکردی با روش پیشنهادی نخست قابل رقابت است ولی نسبت به روش پیشنهادی دوم زودتر از باند فاصله می‌گیرد.



شکل (۲): مقایسه  $RMSE(\mathbf{u})$  تخمین‌گرهای ارائه شده با باند کرامر-رائو به صورت تابعی از واریانس نویز اندازه‌گیری برای یک هدف نزدیک.

مواردی که به طور خاص ذکر می‌شود، یک سامانه راداری MIMO با ۹ فرستنده و ۸ گیرنده در نظر گرفته می‌شود که موقعیت دقیق آن‌ها در جدول (۱) و (۲) آورده شده است.

جدول (۱): موقعیت فرستنده‌ها در فضای سه‌بعدی (m).

$z_{t_i}$	$y_{t_i}$	$x_{t_i}$	$i$
۱۵۰	۰	۰	۱
۱۵۰	-۲۰۰۰	-۳۰۰۰	۲
۱۰۰	۲۰۰۰	-۳۰۰۰	۳
۲۰۰	-۳۰۰۰	-۲۰۰۰	۴
۱۰۰	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۵
۱۰۰	-۳۰۰۰	۲۰۰۰	۶
۸۰	۳۰۰۰	۲۰۰۰	۷
۱۲۰	-۲۰۰۰	۳۰۰۰	۸
۱۶۰	۲۰۰۰	۳۰۰۰	۹

جدول (۲): موقعیت گیرنده‌ها در فضای سه‌بعدی (m).

$z_{s_j}$	$y_{s_j}$	$x_{s_j}$	$j$
۲۰۰	-۴۵۰۰	-۴۵۰۰	۱
۳۰۰	۴۵۰۰	-۴۵۰۰	۲
۴۰۰	-۴۵۰۰	۴۵۰۰	۳
۱۰۰	۴۵۰۰	۴۵۰۰	۴
۲۰۰	۶۰۰۰	۰	۵
۱۰۰	۰	۶۰۰۰	۶
۱۵۰	۰	-۶۰۰۰	۷
۱۰۰	-۶۰۰۰	۰	۸

عملکرد مکان‌یابی با معیار  $RMSE^1$  ارزیابی می‌شود که با استفاده از شبیه‌سازی‌های مونت‌کارلو به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$RMSE(\mathbf{u}) = \sqrt{\sum_{l=1}^L \|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}^0\|^2 / L}, \quad (43)$$

که در آن  $\mathbf{u}^{(l)}$  نشان‌دهنده مقدار تخمینی  $\mathbf{u}^0$  در اجرای  $l$ -ام است. در کلیه شبیه‌سازی‌ها، تعداد اجراهای مونت‌کارلو  $L$  برابر ۵۰۰۰ در نظر گرفته شده است.

در این شبیه‌سازی‌ها، اندازه‌گیری‌های BR به صورت مجموع مقادیر صحیح آن‌ها با نویز گوسی با میانگین صفر تولید می‌شوند. ماتریس کواریانس نویز اندازه‌گیری‌ها را به صورت  $\mathbf{Q}_r = \sigma_r^2 \mathbf{I}_{N_r N_r}$

<sup>1</sup> Root Mean Square Error

<sup>2</sup> Weighted Least Squares

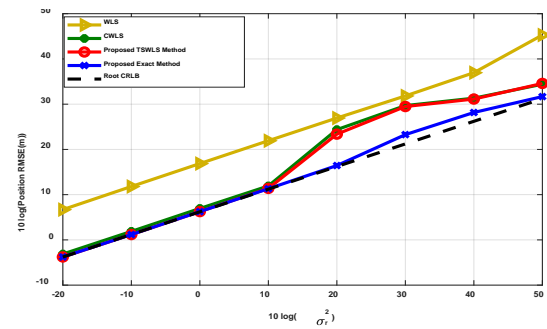
<sup>3</sup> Circular Weighted Least Squares

<sup>4</sup> Two-Stage Weighted Least Squares

دقیق نسبت به روش تخمین دو مرحله‌ای در نویزهای بالا بهتر است. همانگونه که در شکل (۳) نشان داده شده است، عملکرد روش پیشنهادی تا سطوح بالای نویز بسیار نزدیک به باند کرامر-رائو بوده و این موضوع نشان‌دهنده معتبر بودن تقریب تخمین گر ML می‌باشد. همچنین، نتایج این شبیه‌سازی نیز برتری عملکردی تخمین‌گرهای پیشنهادی را نسبت به روش‌های موجود در ادبیات نشان می‌دهد

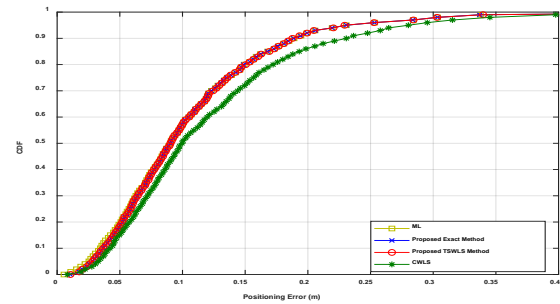
سناریوی ۲: در این سناریو، قصد داریم عملکرد روش‌های ارائه‌شده را برای موقعیت‌های مختلف هدف در ناحیه پوشش ارزیابی کنیم. برای این کار، موقعیت هدف  $\mathbf{u}^0 = [x^0, y^0, z^0]^T$  در هر اجرای مونت‌کارلو به صورت تصادفی با توزیع یکنواخت  $x^0, y^0 \sim \mathcal{U}(-6000, 6000)m$  و  $z^0 \sim \mathcal{U}(1000, 2000)m$  انتخاب می‌شود. برای ارزیابی میزان زیربهبستگی، عملکرد روش‌های مورد ارزیابی را با تخمین گر ML مقایسه می‌کنیم. با توجه به نتایج سناریوی نخست و به منظور نمایش بهتر تفاوت‌ها، در این سناریو از آوردن نتایج روش WLS (که فاصله عملکردی زیادی با روش‌های در حال رقابت دارد) خودداری شده است. برای این کار، یک پیاده‌سازی مبتنی بر تکرار از تخمین گر ML با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی [۳۷] در نظر می‌گیریم. با توجه به ساختار مبتنی بر تکرار این روش، پیچیدگی محاسباتی آن نسبتاً زیاد است. همچنین، به دلیل غیرمحدب بودن مسأله ML، برای جلوگیری از واگرایی الگوریتم باید نقطه اولیه آن را به اندازه کافی نزدیک به موقعیت هدف انتخاب کنیم. برای رسیدن به بهترین دقت ML به عنوان یک معیار عملکردی و جلوگیری از واگرایی آن، این الگوریتم را با موقعیت دقیق هدف مقارنه‌دهی اولیه می‌کنیم. لازم به ذکر است که این کار در سناریوهای عملی امکان‌پذیر نیست و این موضوع ارزش عملی روش‌های پیشنهادی را بیشتر مشخص می‌کند.

در شکل (۴)، عملکرد موقعیت‌یابی را از طریق محاسبه  $CDF^1$  تجربی خطای مکان‌یابی در سطوح مختلف نویز ارزیابی می‌کنیم: الف) نویز کم با انحراف معیار ۰/۳ متر، ب) نویز متوسط با انحراف معیار ۳۰ متر و ج) نویز زیاد با انحراف معیار ۱۰۰ متر. همانگونه که در شکل (۴-الف) نشان داده شده است، در حالت نویز کم عملکرد هر دو روش ارائه‌شده مشابه تخمین گر ML است در حالیکه عملکرد روش CWLS با تخمین گر بهینه فاصله دارد. این موضوع، عدم بهینگی روش CWLS در حالت کلی (حتی در سطوح نویز کم) را نشان می‌دهد. مطابق شکل (۴-ب)، روش دقیق کارایی خود را در مقادیر متوسط نویز نیز حفظ می‌کند در حالیکه روش دو مرحله‌ای از عملکرد بهینه فاصله می‌گیرد. در

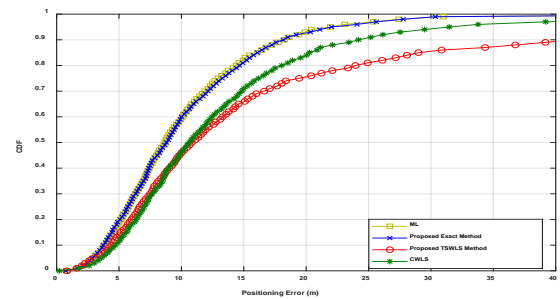


شکل (۳): مقایسه RMSE(u) تخمین‌گرهای ارائه‌شده با باند کرامر-رائو به صورت تابعی از واریانس نویز اندازه‌گیری برای یک هدف دور.

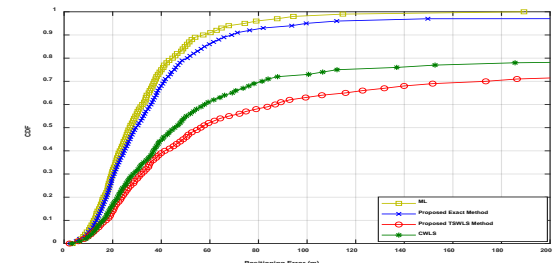
در ادامه حالت مکان‌یابی هدف دور را در نظر می‌گیریم که در آن هدف در مختصات  $\mathbf{u}^0 = [10000, 10000, 1000]^T$  واقع شده است. نمودار RMSE تخمین‌گرهای ارائه‌شده در شکل (۳) رسم شده است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۴): مقایسه عملکرد روش‌های پیشنهادی با تخمین گر ML از طریق CDF تجربی خطای مکان‌یابی در سطوح نویز مختلف: الف) نویز کم (۰/۳ متر، ب) نویز متوسط (۳۰ متر و ج) نویز زیاد (۱۰۰ متر).

مشابه حالت هدف نزدیک، در این حالت نیز عملکرد روش

<sup>1</sup> Cumulative Density Function

$N_t = 5$  فرستنده در نظر گرفته و تعداد گیرنده‌ها را به صورت  $N_r = 1, 2, \dots, 15$  تغییر می‌دهیم. در هر تکرار شبیه‌سازی مونته‌کارلو، موقعیت حسگرها با توزیع یکنواخت در محدوده پوشش به صورت  $x, y \sim \mathcal{U}(-6000, 6000)m$  و  $z \sim \mathcal{U}(100, 500)m$  انتخاب می‌شود. موقعیت هدف و انحراف معیار نویز در این شبیه‌سازی به ترتیب برابر  $\mathbf{u}^0 = [4000, 4000, 1000]^T$  متر و  $\sigma_r = 0.1$  متر می‌باشند. در این سناریو، باند کرامر-رائو روی چیدمان‌های تولید شده برای هر مقدار  $N_t N_r$  متوسط‌گیری شده است. همانگونه که در شکل (۵) نشان داده شده است، دقت موقعیت‌یابی با افزایش مقدار  $N_t N_r$  بهبود می‌یابد و این نتیجه با تحقیقات پیشین در [۳۸، ۷] همخوانی دارد. همچنین، مشاهده می‌شود که هر دو روش پیشنهادی ارائه‌شده برای چیدمان‌های مختلف به باند کرامر-رائو می‌رسد در حالی که روش‌های WLS و CWLS از نظر عملکردی با باند فاصله دارند. لازم به ذکر است که حداقل تعداد حسگر مورد نیاز برای روش CWLS بیشتر از سایر روش‌ها است به گونه‌ای که این روش برای مقادیر  $N_t N_r$  کمتر از ۲۰ قابل اجرا نبوده است.

### ۶- نتیجه‌گیری

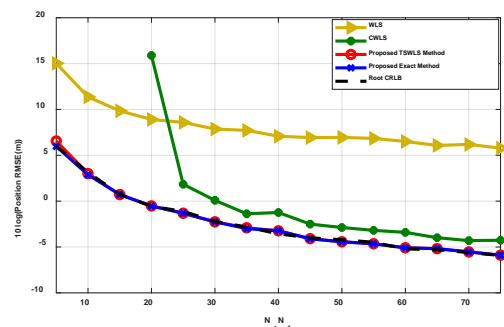
در این مقاله به بررسی مسأله مکان‌یابی سه‌بعدی اهداف در رادارهای MIMO با آنتن‌های توزیع‌یافته پرداخته شده است. در حوزه مکان‌یابی مبتنی بر تأخیر بای‌استاتیک، که به مکان‌یابی بیضوی موسوم است، دو تخمین‌گر حداقل مربعات وزن‌دار چند مرحله‌ای و حل دقیق مسأله حداقل مربعات وزن‌دار مقید ارائه شد. این روش‌ها جایگزین مناسبی برای تخمین‌گر ML هستند که اولاً تخمین موقعیت هدف را با پیچیدگی کم و به صورت تقریباً فرم‌بسته ارائه می‌دهند و ثانیاً مشکل همگرایی سراسری روش‌های بهینه‌سازی تکراری را ندارند. با توجه به نتایج شبیه‌سازی‌های عددی، روش‌های ارائه‌شده از نظر عملکردی تا سطوح نسبتاً بالای نویز کارا بوده و به باند کرامر-رائو می‌رسند. این در حالی است که روش‌های موجود در ادبیات از نظر عملکردی با باند فاصله قابل توجهی دارند و عملکرد آن‌ها با افزایش سطح نویز به سرعت از باند فاصله می‌گیرد. لازم به ذکر است که از میان روش‌های پیشنهادی، روش دوم که مبتنی بر حل دقیق مسأله حداقل مربعات وزن‌دار مقید بوده نسبت به نویز اندازه‌گیری مقاومت بیشتری دارد و تا سطوح بالاتری از نویز بهینگی خود را حفظ می‌کند. نتایج ارزیابی پیچیدگی محاسباتی روش‌ها نشان می‌دهد که با توجه به ذات فرم‌بسته و جبری روش ارائه‌شده اول و سایر روش‌های مورد مقایسه، مرتبه پیچیدگی آن‌ها مشابه است. همچنین، روش ارائه‌شده دوم پیچیدگی بیشتری نسبت به سایر روش‌ها دارد. این پیچیدگی ناشی از

نهایت، در شکل (۴-ج) می‌توان مشاهده کرد که عملکرد روش پیشنهادی نخست و روش CWLS در سطوح نویز بالا با عملکرد ML فاصله زیادی می‌گیرد؛ در حالیکه عملکرد روش پیشنهادی دوم حتی در نویزهای زیاد نیز بسیار نزدیک ML است. در اینجا قصد داریم مجدداً تأکید کنیم که تخمین‌گر ML با مقدار دقیق موقعیت هدف مقداردهی اولیه شده که این موضوع در عمل امکان‌پذیر نیست. همچنین، روش تکراری مورد استفاده برای پیاده‌سازی تخمین‌گر ML پیچیدگی محاسباتی زیادی دارد. در مقابل، روش‌های ارائه‌شده از لحاظ پیچیدگی کارا بوده و تخمین موقعیت هدف را به صورت فرم‌بسته یا تقریباً شکل‌بسته تضمین می‌کند.

در ادامه، به بررسی تقریبی پیچیدگی محاسباتی روش‌های مورد بحث خواهیم پرداخت. برای این کار، از معیار زمان اجرای CPU که بر روی مجموعه‌ای متشکل از ۱۰۰۰ اجرای مونته‌کارلو میانگین‌گیری شده است استفاده می‌شود. شبیه‌سازی‌های مربوطه با استفاده از یک لپ‌تاپ با CPU نمونه Intel Core i5 انجام شده است. نتایج این مقایسه در جدول (۳) آورده شده است. مشاهده می‌شود که تخمین‌گر پیشنهادی نخست (TSWLS) و روش‌های WLS و CWLS که همگی روش‌هایی شکل‌بسته هستند از نظر محاسباتی عملکردی نزدیک به هم دارند و روش پیشنهادی دوم (روش دقیق) پیچیدگی بیشتری دارد. از طرفی، این روش دقت مکان‌یابی بالاتری نسبت به سایر روش‌ها دارد. در نتیجه، در انتخاب تخمین‌گر باید به مصالحه پیچیدگی محاسباتی و دقت مکان‌یابی توجه نمود.

جدول (۳): زمان اجرای الگوریتم‌های مکان‌یابی مختلف (s).

روش اجرا	Exact	TSWLS	WLS	CWLS
زمان اجرا	۰/۰۴۵	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۲



شکل (۵): مقایسه RMSE(u) تخمین‌گرهای ارائه‌شده برای چیدمان‌های مختلف با تغییرات  $N_t N_r$ .

سناریوی ۳: طبق تحقیقات انجام‌شده در [۳۸، ۷]، دقت مکان‌یابی به بهره‌چندگانگی  $N_t N_r$  وابسته است. در این سناریو، قصد داریم دقت مکان‌یابی را برای تعداد و چیدمان‌های مختلف المان‌های رادار بررسی کنیم. برای این کار، یک سامانه راداری با

$$\mathbf{h} - \mathbf{G}\psi^o \approx \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} \quad (48)$$

که در آن  $\mathbf{G}$  و  $\mathbf{h}$  در رابطه (۲۵) تعریف شده‌اند. ماتریس  $\mathbf{B}$  در رابطه (۲۶) تعریف شده و  $\psi^o = [\mathbf{u}^{oT}, R_{s_1}^o]^T$  می‌باشد. از معادله (۴۸) خواهیم داشت:

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{G}\psi^o) \approx \Delta\mathbf{r}. \quad (49)$$

با مقایسه روابط (۴۹) و (۴)، می‌توان نتیجه گرفت که مسأله ML ارائه شده در (۵) را می‌توان به صورت زیر تقریب زد:

$$\min_{\psi^o} [\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{G}\psi^o)]^T \mathbf{Q}_r^{-1} [\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{h} - \mathbf{G}\psi^o)] \\ = (\mathbf{h} - \mathbf{G}\psi^o)^T \mathbf{W} (\mathbf{h} - \mathbf{G}\psi^o) \quad (50)$$

که در آن  $\mathbf{W} = (\mathbf{B}\mathbf{Q}_r\mathbf{B}^T)^{-1}$  است.

مسأله (۵۰) را می‌توان به صورت معادل به شکل مسأله بهینه‌سازی مقید زیر نوشت:

$$\min_{\psi^o} (\mathbf{h} - \mathbf{G}\psi^o)^T \mathbf{W} (\mathbf{h} - \mathbf{G}\psi^o) \\ \text{s.t. } R_{s_i}^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o\| \quad (51)$$

با مربع کردن طرفین، قید مسأله (۵۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(\psi^o - \mathbf{a})^T \mathbf{C} (\psi^o - \mathbf{a}) = 0 \quad (52)$$

که در آن  $\mathbf{C}$  و  $\mathbf{a}$  در (۲۵) تعریف شده‌اند.

## ۸- مراجع

- [1] E. Fishler, A. Haimovich, R. Blum, D. Chizhik, L. Cimini and R. Valenzuela, "MIMO radar: An idea whose time has come," In Proc. of IEEE Radar Conf., pp.71-78, Apr. 2004.
- [2] J. Li and P. Stoica, "MIMO radar with colocated antennas," IEEE Signal Process. Mag., vol.24, no.5, pp.106-114, Sep. 2007.
- [3] J. Li, P. Stoica, L. Xu, and W. Roberts, "On parameter identifiability of MIMO radar," IEEE Signal Process. Lett., vol. 14, no. 12, pp. 968-971, Dec. 2007.
- [4] M. Rossi, A. Haimovich, and Y. Eldar, "Spatial compressive sensing for MIMO radar," IEEE Trans. Signal Process., vol. 62, no. 2, pp. 419-430, 2014.
- [5] J. Yang, H. Chen, Z. Qiu, X. Li, and Z. Zhuang, "Effect of beam pattern performance for colocated multi-input multi-output radar transmitting correlated waveforms" IET Radar Sonar Navigat., vol. 7, no. 6, pp.681-692, 2013.
- [6] A. Haimovich, R. Blum, and L. Cimini, "MIMO radar with widely separated antennas," IEEE Signal Process. Mag., vol. 25, no. 1, pp.116-129, Jan. 2008.
- [7] H. Qian, R. S. Blum, and A. M. Haimovich, "Noncoherent MIMO radar for location and velocity estimation: More antennas means better performance," IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 7, pp. 3661-3680, Jul. 2010.
- [8] A. Hassaniien, S. A. Vorobyov, and A. B. Gershman, "Moving target parameters estimation in non-coherent

تجزیه مقادیر ویژه در قطری‌سازی ماتریس‌ها و محاسبه ریشه‌های چندجمله‌ای است که به صورت عددی انجام می‌شوند. با توجه به اینکه روش دوم دقت موقعیت‌یابی بهتری دارد، این نتیجه، اهمیت مصالحه دقت و پیچیدگی را نشان می‌دهد.

مسیر تحقیقات پیش‌رو در این حوزه شامل حل مسأله مکان‌یابی در حضور مسائل و قیدهای عملی از جمله عدم قطعیت در موقعیت/سرعت حسگرهای فرستنده و گیرنده، سنکرون نبودن زمانی و فرکانسی حسگرها، مکان‌یابی همزمان هدف و حسگرها و مسائل مربوط به انتساب اندازه‌گیری به هدف در مکان‌یابی چند هدفه می‌باشد.

## ۷- پیوست الف

با بیان معادله (۱) برای گیرنده نخست به صورت  $r_{i,1}^o - R_{s_1}^o = R_{t_i}^o$  و مربع کردن طرفین، خواهیم داشت:

$$r_{i,1}^{o2} + \|\mathbf{s}_1^o\|^2 - \|\mathbf{t}_i^o\|^2 - 2(\mathbf{s}_1^o - \mathbf{t}_i^o)^T \mathbf{u}^o \\ - 2r_{i,1}^o R_{s_1}^o = 0, i = 1, 2, \dots, N_r. \quad (44)$$

معادله (۴۴) یک رابطه شبه‌خطی بر حسب  $\mathbf{u}^o$  و شاخص مزاحم  $R_{s_1}^o$  است. به صورت مشابه، می‌توان معادلات شبه‌خطی مشابهی برای سایر گیرنده‌ها با تعریف  $R_{s_j}^o$ ‌ها به عنوان شاخص مزاحم تعریف کرد. با این وجود، برای فرمول‌بندی مسأله با شاخص مزاحم کمتر و به دنبال آن قیدهای بهینه‌سازی کمتر، از رابطه  $R_{s_j}^o = r_{i,j}^o - r_{i,1}^o + R_{s_1}^o$  برای تبدیل  $R_{s_j}^o$ ‌ها ( $j = 2, 3, \dots, N_r$ ) به  $R_{s_1}^o$  استفاده می‌کنیم.

با به توان دو رساندن طرفین رابطه  $R_{s_j}^o = r_{i,j}^o - r_{i,1}^o + R_{s_1}^o$  خواهیم داشت:

$$\|\mathbf{s}_j^o\|^2 - \|\mathbf{s}_1^o\|^2 - (r_{i,j}^o - r_{i,1}^o)^2 - 2(\mathbf{s}_j^o - \mathbf{s}_1^o)^T \mathbf{u}^o \\ - 2(r_{i,j}^o - r_{i,1}^o)R_{s_1}^o = 0, i = 1, 2, \dots, N_r, j = 2, 3, \dots, N_r. \quad (45)$$

با جایگزین کردن  $r_{i,j}^o = r_{i,j}^o - \Delta r_{i,j}$  در معادلات (۴۴) و (۴۵) خواهیم داشت:

$$r_{i,1}^{o2} + \|\mathbf{s}_1^o\|^2 - \|\mathbf{t}_i^o\|^2 - 2(\mathbf{s}_1^o - \mathbf{t}_i^o)^T \mathbf{u}^o - 2r_{i,1}^o R_{s_1}^o \\ \approx 2R_{t_i}^o \Delta r_{i,1}, i = 1, 2, \dots, N_r, \quad (46)$$

$$\|\mathbf{s}_j^o\|^2 - \|\mathbf{s}_1^o\|^2 - (r_{i,j}^o - r_{i,1}^o)^2 - 2(\mathbf{s}_j^o - \mathbf{s}_1^o)^T \mathbf{u}^o \\ - 2(r_{i,j}^o - r_{i,1}^o)R_{s_1}^o \approx 2R_{s_j}^o (\Delta r_{i,1} - \Delta r_{i,j}), \\ i = 1, 2, \dots, N_r, j = 2, 3, \dots, N_r \quad (47)$$

که در آن از جملات مرتبه دوم نویز در برابر جملات خطی آن صرف‌نظر شده است.

با تجميع معادلات (۴۶) و (۴۷) به شکل ماتریسی خواهیم داشت:

- [23] R. Amiri, F. Behnia, and H. Zamani, "Closed-form positioning in MIMO radars with antenna location uncertainties," *IET Radar Sonar Navig.*, 2019.
- [24] A. Noroozi, M. A. Sebt, and A. H. Oveis, "Efficient weighted least squares estimator for moving target localization in distributed MIMO radar with location uncertainties," *IEEE Syst. J.*, 2019.
- [25] R. Amiri, F. Behnia, and A. Noroozi, "Efficient joint moving target and antenna localization in distributed MIMO radars," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 18, no. 9, pp. 4425–4435, 2019.
- [26] A. Noroozi, R. Amiri, M. M. Nayebi, and A. Farina, "Efficient closedform solution for moving target localization in MIMO radars with minimum number of antennas," *IEEE Trans. Signal Process.*, 2020.
- [27] W. Hahn and S. Tretter, "Optimum processing for delay-vector estimation in passive signal arrays," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 19, pp. 608-614, 1973.
- [28] W. R. Hahn, "Optimum signal processing for passive sonar range and bearing estimation," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 58, pp. 201-207, 1975.
- [29] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing, Estimation theory*, Prentice Hall, 1993.
- [30] P. Stoica and K. Sharman, "Maximum likelihood methods for direction of arrival estimation," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 38, no. 7, pp. 1132–1143, 1990.
- [31] K. C. Ho and W. Xu, "An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, no. 9, pp. 2453–2463, 2004.
- [32] J. J. Mor, "Generalizations of the trust region subproblem," *Optim. Methods Softw.*, vol. 2, pp. 189–209, 1993.
- [33] A. Beck, P. Stoica, and J. Li, "Exact and approximate solutions of source localization problems," *IEEE Trans. signal process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1770–1778, 2008.
- [34] R. A. Horn and C. R. Johnson, "Matrix analysis," Cambridge university press, 2013.
- [35] A. Yeredor, "On using exact joint diagonalization for noniterative approximate joint diagonalization," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 12, no. 9, pp. 645–648, 2005.
- [36] M. Grant, S. Boyd, and Y. Ye, "CVX: Matlab software for disciplined convex programming," 2008.
- [37] T. F. Coleman and Y. Li, "An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds," *SIAM J. Optim.*, vol. 6, no. 2, pp. 418–445, 1996.
- [38] H. Godrich, A. M. Haimovich, and R. S. Blum, "Target localization accuracy gain in MIMO radar-based systems," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 56, no. 6, pp. 2783–2803, 2010.
- [9] I. Bekkerman and J. Tabrikian, "Target detection and localization using MIMO radars and sonars," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 10, pp. 3873–3883, Oct. 2006.
- [10] S. A. Zekavat and R. M. Buehrer, "Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances," Eds. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2019.
- [11] R. Amiri, H. Zamani, F. Behnia, and F. Marvasti, "Sparsity-aware target localization using TDOA/AOA measurements in distributed MIMO radars," *ICT Express*, vol. 2, no. 1, pp. 23–27, 2016.
- [12] R. Amiri, F. Behnia, and H. Zamani, "Efficient 3-D positioning using time-delay and AOA measurements in MIMO radar systems," *IEEE Commun. Lett.*, 2017.
- [13] S. A. R. Kazemi, R. Amiri, and F. Behnia, "Efficient convex solution for 3-D localization in MIMO radars using delay and angle measurements," *IEEE Commun. Lett.*, 2019.
- [14] M. Einemo and H. C. So, "Weighted least squares algorithm for target localization in distributed MIMO radar," *Signal Process.*, vol. 115, pp. 144 – 150, 2015.
- [15] M. Dianat, M. R. Taban, J. Dianat, and V. Sedighi, "Target localization using least squares estimation for MIMO radars with widely separated antennas," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 49, no. 4, pp. 2730–2741, 2013.
- [16] A. Noroozi and M. A. Sebt, "Target localization from bistatic range measurements in multi-transmitter multi-receiver passive radar," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 12, pp. 2445–2449, 2015.
- [17] C. H. Park and J. H. Chang, "Closed-form localization for distributed MIMO radar systems using time delay measurements," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 15, no. 2, pp. 1480–1490, 2016.
- [18] H. Yang and J. Chun, "An improved algebraic solution for moving target localization in noncoherent MIMO radar systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 64, no. 1, pp. 258–270, 2016.
- [19] R. Amiri, F. Behnia, and M. A. M. Sadr, "Efficient positioning in MIMO radars with widely separated antennas," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 21, no. 7, pp. 1569–1572, 2017.
- [20] R. Amiri, F. Behnia, and M. A. M. Sadr, "Positioning in MIMO radars based on constrained least squares estimation," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 21, no. 10, pp. 2222–2225, 2017.
- [21] F. Zhang, Y. Sun, J. Zou, D. Zhang, and Q. Wan, "Closed-form localization method for moving target in passive multistatic radar network," *IEEE Sens. J.*, vol. 20, no. 2, pp. 980–990, 2019.
- [22] H. Song, G. Wen, L. Zhu, and D. Li, "A novel TSWLS method for moving target localization in distributed MIMO radar systems," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 23, no. 12, pp. 2210–2214, 2019.

---

## Target Localization in MIMO Radars with Distributed Antennas

R. Amiri, F. Behnia\*

\* Sharif University of Technology, Tehran, Iran

(Received: 24/03/2020, Accepted: 17/05/2020)

### Abstract

In this paper, the problem of elliptic target localization in distributed multiple-input multiple-output (MIMO) radars is investigated. The goal of elliptic localization is to estimate the target position from a set of noisy bistatic delay measurements. Since the maximum likelihood (ML) problem associated with elliptic localization is nonconvex, iterative methods can be trapped in local minimums, leading to inaccurate location estimation. To solve this problem, a number of (almost closed-form) estimators are proposed, which can locate the target without convergence concern. The proposed methods are efficient, achieving Cramer-Rao lower bound (CRLB) up to relatively high noise levels. These methods are of superior localization accuracy in comparison with the state-of-the-art methods. Furthermore, according to the closed-form and algebraic nature of the proposed methods, they have very low computational complexity, which is similar to other existing closed-form methods in the literature. It should be noted that the ideas presented in this paper can be considered as a baseline for future research studies in the area of localization in radar systems.

**Keywords:** Target Localization, MIMO Radars, Cramer-Rao Lower Bound (CRLB), Weighted Least Square Estimation, Bistatic Delay

---

\* Corresponding author E-mail: behnia@sharif.edu ir