

## آشکارسازی اهداف متحرک در رادارهای فرکانس پله‌ای با استفاده از حسگری فشرده

محمدحسن آقابابائی<sup>۱</sup>، محمدفرزان صباحی<sup>۲\*</sup>، امیررضا فروزان<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، ۲ و ۳- استادیار، گروه مهندسی برق، دانشگاه اصفهان

(دریافت: ۹۴/۰۳/۱۴؛ پذیرش: ۹۵/۰۶/۲۴)

### چکیده

رادارهای فرکانس پله‌ای به دلیل تامین قدرت تفکیک بُرد بالا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. روش مرسوم پردازش در این رادارها استفاده از معکوس تبدیل فوریه سریع یا IDFT است. این روش برای تشخیص اهداف متحرک با مشکل انتقال و گستردگی بُرد روبروست که باعث کم شدن دامنه هدف، از دست دادن دقت فاصله سنجی و کاهش قدرت تفکیک بُرد می‌شود. برای غلبه بر این مشکل در این رادارها از روش خنثی‌سازی سرعت استفاده می‌شود. از آنجاکه سرعت هدف نامشخص است مجبوریم سیگنال دریافتی را به‌ازای تمام سرعت‌های ممکن خنثی کنیم و سپس سیگنالی که بزرگترین و تیزترین خروجی IDFT را می‌دهد انتخاب کنیم. در این مقاله با استفاده از ایده‌های حسگری فشرده، روشی جدید برای استخراج بُرد و سرعت اهداف در رادارهای فرکانس پله‌ای ارائه می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که روش ارائه‌شده مشکل انتقال و گستردگی بُرد را ندارد و همچنین کارایی آن از روش‌های دیگر مبتنی بر حسگری فشرده بهتر است. مفهوم پردازش همدوس را نیز در رادارهای حسگری فشرده مورد بررسی قرار می‌دهیم. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که می‌توان با استفاده از پردازش همدوس، کارایی آشکارسازهای راداری مبتنی بر حسگری فشرده را به‌طور قابل توجهی بهبود بخشید.

### واژگان کلیدی

حسگری فشرده، رادار فرکانس پله‌ای، قدرت تفکیک بالا.

### ۱. مقدمه

از سرعت هدف را جبران نموده و امکان دستیابی به حد تفکیک بالا را نیز فراهم می‌کند. مشکل این روش، این است که پیچیدگی محاسباتی بالایی دارد.

حسگری فشرده مفهوم جدیدی است که در چند سال اخیر ارائه شده و به سرعت کاربدهای بسیار فراوانی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است [۳-۵]. این نظریه بیان می‌کند که می‌توان سیگنال  $s$  با ابعاد  $M \times 1$  و تنک از مرتبه  $K$  را تحت شرایط معینی از روی اندازه‌گیری‌های  $y = \psi s + w$  با ابعاد  $N \times 1$  توسط بهینه‌سازی نُرم  $\ell_1$  با احتمال بالایی بازیابی کرد که در آن  $\psi$  ماتریسی با ابعاد  $N \times M$  بوده و ماتریس حسگری نامیده می‌شود.  $w$  نیز بُردار نویز اندازه‌گیری می‌باشد.

در سامانه‌های راداری به دلیل کم بودن تعداد اهداف نسبت به تعداد سلول‌های بُرد، ویژگی تنکی وجود دارد و بنابراین حسگری فشرده کاربدهای فراوانی در سامانه‌های راداری خواهد داشت [۶-۹]. حسگری فشرده در رادارهای فرکانس پله‌ای نیز مورد استفاده قرار گرفته است. در [۱۰]، از حسگری فشرده در آشکارسازی اهداف متحرک در رادارهای فرکانس پله‌ای استفاده شده است. در آنجا کارایی آشکارسازی روش IDFT با یک روش مبتنی بر حسگری فشرده موسوم به Dantzig Selector مقایسه شده است. نشان داده شده که Dantzig Selector تمامی SNRها بهتر از IDFT عمل می‌کند. در [۱۱]، حسگری

داشتن قدرت تفکیک بالا در رادار مزایای زیادی به‌وجود می‌آورد. به عنوان مثال توانایی تفکیک اهداف نزدیک به هم از نظر فاصله، بهبود دقت فاصله سنجی، کاهش مقدار کلاتر در سلول‌های بُرد، آشکارسازی اهداف دارای سطح مقطع راداری (RCS) کوچک تعبیه‌شده در داخل کلاتر و ... یکی از روش‌های شناخته‌شده برای رسیدن به قدرت تفکیک بالا استفاده از شکل موج‌های فرکانس پله‌ای است. در این روش، فرکانس پالس‌های ارسالی به صورت پالس به پالس با یک گام فرکانسی معمولاً ثابت افزایش می‌یابد. در این رادارها پهنای باند لحظه‌ای کوچک اما پهنای باند مؤثر عدد بزرگی می‌باشد. این پهنای باند مؤثر بزرگ باعث افزایش قدرت تفکیک بُرد می‌شود. روش مرسوم پردازش در رادارهای فرکانس پله‌ای، استفاده از IDFT<sup>۱</sup> است. این روش هنگام آشکارسازی اهداف متحرک دارای مشکلات انتقال و گستردگی بُرد<sup>۲</sup> می‌باشد [۱]. برای غلبه بر این مشکلات در [۲] به جای تبدیل IDFT از DCFT<sup>۳</sup> استفاده شده است. در آنجا نشان داده شده است که الگوریتم پیشنهادی، افت عملکرد ناشی

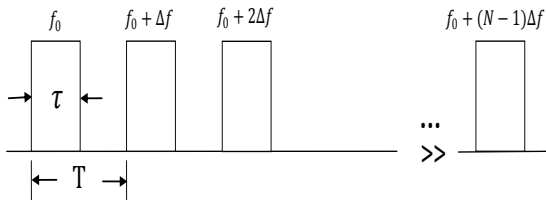
\*رایانامه نویسنده پاسخگو: sabahi@eng.ui.ac.ir

<sup>۱</sup>Inverse Discrete Fourier Transform

<sup>۲</sup>Range Shifting and Range Spreading

<sup>۳</sup>Discrete Chirp-Fourier Transform

به عبارتی این شکل سیگنال، همانند شکل سیگنال رادار پالسی ساده می‌باشد با این تفاوت که فرکانس حامل هر پالس در یک گروه  $N$  پالسی به اندازه  $\Delta f$  تغییر می‌کند.



شکل ۱. سیگنال فرکانس پله‌ای

فرکانس  $n$ -امین پالس را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$f_n = f_0 + n\Delta f, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

که در آن،  $f_0$  فرکانس حامل شروع و  $\Delta f$  طول گام فرکانسی می‌باشد. پهنای هر پالس،  $\tau$  ثانیه بوده و بازه زمانی بین پالس‌ها یعنی  $T$  مطابق با ماکزیمم بُرد بدون ابهام انتخاب می‌گردد. توجه کنید که در داخل هر پالس، فرکانس ثابت می‌ماند. هر دسته پالس  $N$  تایی را یک burst می‌نامیم که قبل از هرگونه پردازشی باید یک burst کامل ارسال و دریافت شود. زمان burst یعنی زمان متناظر با ارسال  $N$  پالس را  $CPI^6$  می‌نامیم که در حقیقت در اینجا همان زمان مشاهده<sup>۷</sup> می‌باشد. این زمان برابر با  $NT$  است. از آنجاکه فرکانس داخل هر پالس ثابت می‌ماند، پهنای باند هر پالس تنها به‌طور تقریبی برابر با معکوس پهنای پالس یعنی  $1/\tau$  می‌باشد. در نتیجه می‌توان پهنای باند لحظه‌ای رادار (که برابر است با  $1/\tau$ ) را کوچک فرض نمود. به عبارت دیگر در پیاده‌سازی رادار می‌توان از تجهیزات باند باریک (به جز آنتن و فرستنده) استفاده کرد.

قدرت تفکیک بُرد در یک رادار فرکانس پله‌ای به صورت زیر است [۱]:

$$\Delta R = \frac{c}{2B_{eff}} = \frac{c}{2N\Delta f} \quad (2)$$

در حقیقت قدرت تفکیک رادار به پهنای باند لحظه‌ای وابسته نیست بلکه می‌توان با افزایش پهنای باند مؤثر یعنی  $N\Delta f$ ، قدرت تفکیک بُرد را به اندازه دلخواه افزایش داد که این یکی از مزایای مهم رادار فرکانس پله‌ای است. در انتخاب  $\Delta f$  محدودیت  $\Delta f \leq 1/\tau$  وجود دارد اما  $N$  را می‌توان برای رسیدن به هر قدرت تفکیک مطلوبی به اندازه دلخواه افزایش داد [۱].

در روش مرسوم پردازش سیگنال‌های فرکانس پله‌ای، که به کمک IDFT انجام می‌شود ابتدا range binning انجام می‌گیرد. در این مرحله داده‌ها در ماتریس بُرد - پالس<sup>۸</sup> همانند شکل ۲

فشرده در آشکارسازی اهداف راداری ساکن در رادارهای فرکانس پله‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. در این مرجع دو روند آشکارسازی مختلف ارائه شده و برای احتمال هشدار غلط و احتمال آشکارسازی، روابط تحلیلی ارائه شده است. در [۱۲]، حسگری فشرده در رادارهای MIMO فرکانس پله‌ای برای آشکارسازی اهداف متحرک به کار گرفته شده است. در [۱۳]، نیز از روش‌های مبتنی بر حسگری فشرده برای آشکارسازی اهداف ساکن در رادارهای فرکانس پله‌ای استفاده شده است. در آنجا بازیابی اهداف توسط روشی موسوم به BPDN<sup>۱</sup> انجام شده و نتیجه آن با روش IDFT مقایسه شده است. نتایج به‌دست‌آمده، نشان داده است که روش BPDN به‌ازای تمامی ضرایب فشرده‌سازی بهتر از IDFT عمل می‌کند و در ضرایب فشرده‌سازی کوچک‌تر، عملکرد آن بسیار بهتر از روش IDFT می‌باشد.

در این مقاله با شبکه‌بندی<sup>۲</sup> حوزه سرعت و بُرد، روش BPDN را تعمیم می‌دهیم و روشی جدید برای آشکارسازی اهداف متحرک در فضای بُرد-داپلر در رادارهای فرکانس پله‌ای پیشنهاد می‌کنیم. اگر ماتریس حسگری دارای ویژگی RIP<sup>۳</sup> باشد بازیابی براساس کمینه‌سازی نُرم  $\ell_1$  با دقت بالا انجام می‌شود [۱۴]. نشان خواهیم داد که ماتریس‌های حسگری جزئی فوریه<sup>۴</sup> که در شکل موج‌های فرکانس پله‌ای با آنها سرو کار داریم، به‌ازای ضرایب فشرده‌سازی مطلوب ما ویژگی RIP را ارضا نمی‌کنند و در نتیجه هیچ تضمینی برای کیفیت بازیابی براساس نُرم  $\ell_1$  وجود نخواهد داشت. با این وجود، چون ویژگی RIP یک شرط کافی و نه لازم برای بازیابی با دقت بالا است، شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که علیرغم نبود ویژگی RIP، طبق روش پیشنهادی ما بازیابی با دقت بالا امکان‌پذیر است. همچنین شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که کارایی روش پیشنهادی خصوصاً در  $p_{fa}$  های کوچک بسیار بهتر از روش‌های ارائه‌شده قبلی است. همچنین کارایی آشکارسازی با استفاده از پردازش همدوس<sup>۵</sup> نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نشان داده شده که می‌توان بعد از عملیات بازیابی فشرده‌سازی پردازش همدوس برای بهبود عملکرد آشکارسازها استفاده کرد. شبیه‌سازی‌های انجام‌شده نشان می‌دهد که می‌توان توسط پردازش همدوس، نمودارهای ROC یا به‌طور متناظر SNR را به‌طور قابل توجهی بهبود بخشید.

## ۲. شکل موج‌های فرکانس پله‌ای

شکل موج ارسالی رادار فرکانس پله‌ای مطابق شکل ۱ شامل گروهی از  $N$  پالس می‌باشد که فرکانس حامل این پالس‌ها به صورت پالس به پالس با گام فرکانسی ثابت  $\Delta f$  افزایش می‌یابد.

<sup>۱</sup>Basis Pursuit Denoising

<sup>۲</sup>gridlines

<sup>۳</sup>Restricted Isometry Property

<sup>۴</sup>Partial Fourier Sensing Matrix

<sup>۵</sup>Coherent Processing

<sup>۶</sup> Coherent Processing Interval

<sup>۷</sup> Observation Time

<sup>۸</sup>Range-Pulse Matrix

ثابت است). بنابراین، سیگنال بازگشتی از هدف، به‌ازای پالس  $k$ -ام، به شکل زیر است:

$$r_k(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{2R}{c}}{T}\right) e^{-j2\pi f_k \left(t - \frac{2}{c}(R+v(k-1)T)\right)} \quad (5)$$

با ضرب سیگنال دریافتی در سیگنال مرجع و به‌دست آوردن اختلاف فاز ایجاد شده، می‌توان خروجی آشکارساز فاز به‌ازای پالس  $k$ -ام را به‌صورت زیر نوشت:

$$y_k = e^{j2\pi(f_0 + (k-1)\Delta f) \left(\frac{2}{c}(R+v(k-1)T)\right)} \quad (6)$$

که در آن  $T$  دوره تناوب تکرار پالس و  $c$  سرعت نور می‌باشد. در رابطه فوق  $y_k$  به‌ازای هدف فرضی موجود در فاصله  $R$  با سرعت  $v$  بدست آمده است. در صورت وجود چندین هدف با فاصله‌ها و سرعت‌های مختلف از رادار در صحنه، سیگنال بازگشتی مربوط به پالس  $k$ -ام بصورت مجموع سیگنال‌های بازگشتی از اهداف خواهد بود که در رابطه (۷) به آن اشاره شده است. لازم به ذکر است در روش مرسوم پردازش فوریه سیگنال رادار فرکانس پله‌ای، در صورتی که از  $N$  پالس استفاده شود، برای حفظ همزمان بیشترین بُرد بدون ابهام ( $R_u$ ) و قدرت تفکیک رادار، می‌بایست کل بُرد بدون ابهام رادار به  $N$  قسمت تقسیم شود. بنابراین، قدرت تفکیک بُرد  $\frac{R_u}{N}$  خواهد بود [۱]. در روش مبتنی بر حسگری فشرده خواهیم دید با ارسال تعداد کمتری پالس می‌توان به همان قدرت تفکیک دست یافت.

برای ایجاد یک مدل مناسب قابل حل به روش حسگری فشرده، فضای بُرد و داپلر را شبکه‌بندی می‌کنیم. اگر فضای بُرد را به صورت  $[R_1, R_2, \dots, R_M]$  و فضای سرعت را به شکل  $[v_1, v_2, \dots, v_L]$  در نظر بگیریم می‌توان رابطه (۶) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$y_k = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L e^{j2\pi f_k \left(\frac{2}{c}(R_m + v_l(k-1)T)\right)} s(m, l) + w_k \quad (7)$$

که در آن، داریم:

$$s(m, l) = \begin{cases} \alpha & \text{reflectivity of target presented at } (R_m, v_l) \\ 0 & \text{target is absent at } ((m-1)L + l) - \text{th grid} \end{cases} \quad (8)$$

با در نظر گرفتن  $y_k$ ها به‌ازای  $k=1, 2, \dots, N$  و تعریف بُردار  $s$  به صورت  $s = [s_1, s_2, \dots, s_{ML}]^T$  که در آن  $0 \leq m \leq (M-1)$  و  $0 \leq l \leq (L-1)$  است، می‌توان رابطه ماتریسی زیر را نوشت:

$$y = \psi s + w \quad (9)$$

که در آن بردار نویز اندازه‌گیری شده بوده و مؤلفه‌های ماتریس  $\psi$  به شکل زیر است:

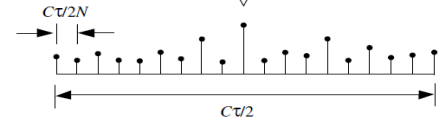
$$\psi(k, (m-1)L + l) = e^{j2\pi(f_0 + (k-1)\Delta f) \left(\frac{2}{c}(R_m + v_l(k-1)T)\right)} \quad (10)$$

جمع‌آوری می‌شود [۱]. این داده‌ها با ضرب سیگنال دریافتی در سیگنال مرجع، که سیگنالی مشابه سیگنال ارسالی است، و عبور سیگنال حاصل، از یک فیلتر پایین‌گذر و نمونه‌برداری از خروجی به‌دست می‌آید. فرآیند ضرب در سیگنال مرجع و عبور از فیلتر پایین‌گذر معادل آشکارسازی فاز است. به‌ازای هر عرض پالس (یعنی  $\tau$ ) یک نمونه از خروجی آشکارساز فاز اخذ می‌شود. لازم به ذکر است آشکارسازی فاز توسط یک دی‌مدولاتور متعامد انجام می‌شود و در نتیجه خروجی آشکارساز فاز را می‌توان متناظر نمونه‌های مختلط باند پایه تعبیر نمود. هر ستون از ماتریس بُرد-پالس نشان‌دهنده خروجی آشکارساز فاز، متناظر با دریافتی از  $N$  پالس درون یک burst و مربوط به یک سلول فاصله خاص با پهنای  $cT/2$  می‌باشد. با گرفتن IDFT از هر ستون، یک سلول فاصله خاص (با پهنای  $cT/2$ ) به  $N$  زیر قسمت مساوی با پهنای  $cT/2N$  (البته برای حالت خاص  $\tau\Delta f = 1$ ) تجزیه می‌شود و بدین ترتیب قدرت تفکیک فاصله در رادار افزایش پیدا می‌کند.

DFT Range-Pulse Matrix

Frequency	Pulse No.	Range Bins			
		$R_1$	$R_2$	$R_3$	$\dots R_M$
$f_0$	$P_1$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	$S_{1M}$
$f_0 + \Delta f$	$P_2$	$S_{21}$	$S_{22}$	$S_{23}$	$\dots$
$f_0 + 2\Delta f$	$P_3$	$S_{31}$	$S_{32}$	$S_{33}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f_0 + (N-1)\Delta f$	$P_N$	$S_{N1}$	$S_{N2}$	$S_{N3}$	$\dots S_{NM}$

DFT



شکل ۲. الگوریتم افزایش قدرت تفکیک در رادارهای فرکانس پله‌ای به کمک پردازش فوریه [۱].

### ۳. مدل کردن مسئله برای رسیدن به معادلات حسگری فشرده

یک رادار فرکانس پله‌ای را در نظر می‌گیریم که  $N$  پالس ارسال می‌کند. به منظور سادگی در علائم، فرکانس  $k$ -امین پالس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_k = f_0 + (k-1)\Delta f, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3)$$

شکل موج  $k$ -امین پالس ارسالی رادار در باند پایه نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f_k t} \quad (4)$$

اگر هدفی در فاصله  $R$  از رادار قرار داشته و با سرعت شعاعی  $v$  نسبت به رادار حرکت کند، داریم  $R_k = R + v(k-1)T$  که در آن منظور از  $R_k$  فاصله هدف تا رادار در لحظه ارسال  $k$ -امین پالس است (که فرض می‌شود تا لحظه ارسال پالس بعدی تقریباً

#### ۴-۲. بررسی جزئیات روش پیشنهادی

دیدیم که سیگنال مطلوب ما بردار  $s$  با ابعاد  $ML \times 1$  بوده و این سیگنال در حوزه  $\psi$ ، تنک از مرتبه  $K$  می‌باشد. یعنی  $s = \psi\alpha$  که در آن فقط  $K$  ضریب از ضرایب  $\alpha$  غیر صفر است. تحت این شرایط، حسگری فشرده تضمین می‌کند که می‌توان سیگنال  $s$  را از روی  $ML \ll N$  اندازه‌گیری‌های فشرده نویزی بازیابی کرد. برای بیان این شرایط ابتدا دو تعریف زیر را انجام می‌دهیم.

**تعریف ۱:** ماتریس  $\psi$  دارای ویژگی تقارن محدود (RIP) از مرتبه  $K$  است هرگاه  $\delta_K \in (0,1)$  وجود داشته باشد به طوری که، برای هر  $s \in \Sigma_K = \{s: \|s\|_0 \leq K\}$  داشته باشیم [۱۷]:

$$(1 - \delta_K) \|s\|_2^2 \leq \|\psi s\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|s\|_2^2 \quad (11)$$

$\Sigma_K$  در حقیقت نشان‌دهنده مجموعه تمام سیگنال‌های تنک از مرتبه کمتر یا مساوی با  $K$  می‌باشد.

چک کردن ویژگی RIP برای یک ماتریس بسیار مشکل و پیچیده است به همین دلیل ویژگی همدوسی را که چک کردن آن بسیار ساده است، به صورت زیر تعریف کرده و رابطه بین آن با ویژگی RIP را در قضیه ۱ بیان می‌کنیم.

**تعریف ۲:** همدوسی ماتریس  $\psi_{M \times N}$  را با  $\mu(\psi)$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۸]:

$$\mu(\psi) = \max_{1 \leq i, j \leq N} \frac{|\langle \psi_i, \psi_j \rangle|}{\|\psi_i\|_2 \|\psi_j\|_2} \quad (12)$$

که در آن  $\psi_i$  و  $\psi_j$  به ترتیب نشان دهنده  $i$ -امین و  $j$ -امین ستون از ماتریس  $\psi$  بوده و  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  بیانگر ضرب داخلی است.

**قضیه ۱:** اگر ماتریس  $\psi$  دارای ستون‌هایی با نرم واحد و همدوسی  $\mu = \mu(\psi)$  باشد، آن‌گاه دارای ویژگی RIP از مرتبه  $K$  با  $\mu(K-1) = \delta$  برای هر  $\mu < 1/K$  خواهد بود.

قضیه ۱ به طور مستقیم از قضیه معروف Gershgorincircle نتیجه می‌شود [۱۹].

با توجه به تنک بودن بردار مطلوب  $s$  طبیعی است برای بازیابی آن از روی اندازه‌گیری‌های فشرده نویزی  $y$  به دنبال حل مسأله بهینه‌سازی زیر بگردیم:

$$\hat{s} = \arg \min_z \|z\|_0 \quad s.t. \quad \|\psi z - y\|_2 \leq \epsilon \quad (13)$$

که در آن،  $\|z\|_0$  در حقیقت تعداد مؤلفه‌های غیر صفر بردار  $z$  را می‌شمارد. بنابراین رابطه (۱۳) به جستجوی تنک‌ترین سیگنال سازگار با اندازه‌گیری‌های مشاهده شده، می‌پردازد. اگرچه تحت شرایط مشخصی روی ماتریس  $\psi$  می‌توان کارایی رابطه بالا را تجزیه و تحلیل کرد اما با توجه به غیر محدب بودن تابع  $\| \cdot \|_0$

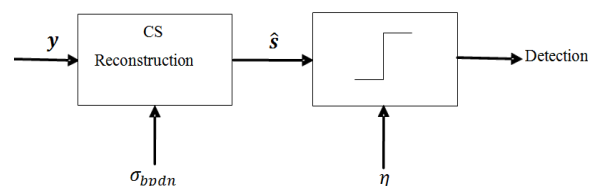
برای بازیابی بردار  $s$  از معادله (۹) (یعنی بازیابی در حالت دو بعدی) با استفاده از مفاهیم حسگری فشرده، تاکنون فقط یک روش در [۱۰]، ارائه شده است. در این مرجع برای بازیابی فشرده از الگوریتم Dantzig Selector استفاده شده است [۱۵]. در آنجا نشان داده شده که این روش، مشکلات انتقال و گستردگی بُرد را ندارد و همچنین کارایی آن در تمامی SNRها بهتر از روش IDFT می‌باشد. در حالت کلی می‌توان گفت که روش‌های مبتنی بر حسگری فشرده مشکلات انتقال و گستردگی بُرد را ندارند.

در این مقاله روشی جدید برای آشکارسازی اهداف متحرک در صفحه بُرد-دایر در رادارهای فرکانس پله‌ای ارائه می‌شود. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی عملکرد بسیار بهتری نسبت به روش ارائه شده در [۱۰]، در آشکارسازی اهداف متحرک دارد.

#### ۴. روش BPDN دوبعدی (2D-BPDN)

##### ۴-۱. روش پیشنهادی

روش پیشنهادی به صورت بلوک دیاگرام شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، ابتدا سیگنال دریافتی نمونه‌برداری شده  $y$  (متناظر با رابطه (۹)) توسط یک الگوریتم آشکارسازی با سطح آستانه  $\sigma_{bpdn}$  بازیابی می‌شود. با انتخاب این سطح آستانه به صورت مضری از انحراف استاندارد نویز، براساس شبیه‌سازی‌های انجام شده، خواهیم دید که روش پیشنهادی بهتر از سایر روش‌های ارائه شده عمل خواهد کرد. از آنجا که مؤلفه‌های بردار مجهولات  $s$  در رابطه (۸) نشان‌دهنده اندازه سیگنال بازگشتی از هدف است، برای آشکارسازی داده‌ها بعد از عملیات بازیابی فشرده می‌توان از داده‌های بازیابی شده استفاده کرد. دقت و کیفیت تخمین بردار  $s$  به مقدار انتخابی برای  $\sigma_{bpdn}$  بستگی دارد. به عبارت دیگر انتخاب  $\sigma_{bpdn}$  بر پارامترهای راداری مانند  $p_a$  و  $p_{fa}$  مؤثر است. هرچند مقایسه مؤلفه‌های بردار  $s$  با مقدار صفر می‌تواند به عنوان روشی برای آشکارسازی در نظر گرفته شود اما رسیدن به یک  $(p_a, p_{fa})$  مشخص تنها با تنظیم پارامتر  $\sigma_{bpdn}$  غیر ممکن است. بنابراین پس از بازیابی برای آشکارسازی اهداف راداری، یک سطح آستانه برای مقایسه در نظر گرفته و بلوک دیاگرام شکل ۳ پیشنهاد شده است.



شکل ۳. بلوک دیاگرام آشکارسازی به روش 2D-BPDN

در نتیجه خطای حاصل از حل رابطه (۱۴) کمتر یا مساوی عددی متناسب با انحراف استاندارد نویز یعنی  $\sigma$  خواهد بود. بنابراین اگر ماتریس حسگری دارای ویژگی RIP باشد، قضیه ۲ تضمینی برای بازیابی صحیح و سنجش میزان خطای حاصل می‌باشد. اما نکته مهم اینجاست که ماتریس‌های جزئی فوریه که در شکل موج های ارسال فرکانس پله‌ای با آنها مواجه می‌شویم، به‌ازای ضرایب فشرده‌سازی مطلوب ما ویژگی RIP را ارضا نمی‌کنند (این مطلب در پیوست ۱ ثابت شده است). با این حال باید توجه کرد که ویژگی RIP شرط کافی برای بازیابی دقیق و کامل است ولی شرط لازم نیست. در حقیقت وجود خاصیت RIP یک خاصیت کافی و نه لازم برای بازسازی سیگنال با کران خطای مشخص است. عدم وجود خاصیت RIP الزاماً به معنی عدم امکان بازسازی نیست بلکه امکان ارائه تضمین برای محدود شدن خطای بازسازی به کران مشخص را سلب می‌کند. می‌توان گفت وجود خاصیت RIP یک خصوصیت بسیار قوی و محافظه کارانه برای بازسازی سیگنال است. در بسیاری از موارد، به دلیل پیچیدگی‌های محاسباتی بسیار بالا، امکان نشان دادن این ویژگی برای ماتریس‌های حسگری (بویژه ماتریس‌های قطعی) وجود ندارد [۱۷]. با این حال حتی در صورتی که ویژگی RIP وجود نداشته باشد می‌توان به استفاده از الگوریتم‌های مبتنی بر حسگری فشرده مبادرت نمود و نتایج واقعی حاصل شده را مورد ارزیابی قرار داد. در ادامه، نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان خواهد داد که این مطلب در مورد ماتریس‌های جزئی فوریه صدق می‌کند. به‌عنوان مثال به‌ازای پارامترهای جدول (۳) طبق مقادیر جدول ۱ و روند ارائه‌شده در پیوست ۱، ویژگی RIP وجود ندارد اما طبق شکل ۶ بازیابی با دقت بالا انجام شده است.

همان‌طور که ملاحظه شد در حالتی که ماتریس  $\psi$  دارای ویژگی RIP باشد سطح آستانه  $\sigma_{bpdn}$  متناسب با انحراف استاندارد نویز یعنی  $\sigma$  انتخاب می‌شود تا طبق قضیه ۲ کرانی برای خطای بازیابی براساس کمینه‌سازی نرم  $\ell_1$  تخمین زده شود. هر چند در پیوست ۱ نشان داده شده است که ماتریس‌های جزئی فوریه به‌ازای ضرایب فشرده‌سازی مطلوب ما ویژگی RIP را ارضا نمی‌کنند، در این حالت نیز فرض می‌کنیم که  $\sigma_{bpdn}$  ضریبی از  $\sigma$  باشد. با این فرض می‌توان با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی برای  $\frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$ ، ROC‌های حالات مختلف را رسم کرده و سپس آن ضریبی که به ROC بهتری منجر می‌شود را به‌عنوان ضریب مناسب انتخاب کرد. این روش در [۱۳]، برای آشکارسازی اهداف ساکن استفاده شده است و در اینجا با تعمیم معادلات حسگری فشرده به حالت دو بُعدی این روش را برای آشکارسازی اهداف متحرک به کار می‌گیریم.

در پیوست ۱ ثابت شده است که در حالت اهداف ساکن،

حل مساله بهینه‌سازی رابطه (۱۳) ذاتاً مشکل است و با یک مساله NP-hard روبرو هستیم. یک روش برای تبدیل این مساله به یک مساله رام شدنی<sup>۱</sup>، جایگزین کردن تابع غیرمحدب  $\|s\|_0$  با تابع محدب  $\|s\|_1$  است. بنابراین رابطه (۱۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\hat{s} = \arg \min_s \|s\|_1 \quad s.t. \quad \|\psi s - y\|_2 \leq \sigma_{bpdn} \quad (14)$$

که در آن،  $\sigma_{bpdn}$  آستانه‌ای متناسب با انحراف استاندارد نویز یعنی  $\sigma$  است [۱۶]. واضح است که جایگزینی رابطه (۱۳) با رابطه (۱۴) که موسوم به BPDN است یک مساله رام نشدنی<sup>۲</sup> از نظر محاسباتی را به یک مساله رام شدنی تبدیل می‌کند اما ممکن است پاسخ حاصل از رابطه (۱۴) اصلاً شبیه به پاسخ حاصل از رابطه (۱۳) نباشد. اما اگر ماتریس  $\psi$  دارای ویژگی RIP باشد، بازیابی با دقت بالا تضمین شده و خطای بازیابی حاصل از رابطه (۱۴) طبق قضیه ۲ به‌دست می‌آید.

**قضیه ۲:** فرض کنید ماتریس  $\psi$  دارای ویژگی RIP از مرتبه  $2K$  با  $1 - \sqrt{2} < \delta_{2K}$  بوده و داریم  $y = \psi s + w$  که در آن  $\|w\|_2 \leq \varepsilon$  می‌باشد. حل رابطه (۱۴) ما را به جواب تنکی می‌رساند که خطای آن به‌صورت زیر است:

$$\|\hat{s} - s\|_2 \leq C_1 \frac{\sigma_K(s)_1}{\sqrt{K}} + C_2 \varepsilon \quad (15)$$

که در آن داریم:

$$C_1 = 2 \frac{1 - (1 - \sqrt{2})\delta_{2K}}{1 - (1 + \sqrt{2})\delta_{2K}}, \quad C_2 = 4 \frac{\sqrt{1 + \delta_{2K}}}{1 - (1 + \sqrt{2})\delta_{2K}},$$

$$\sigma_K(s)_p = \min_{\hat{s} \in \Sigma_K} \|s - \hat{s}\|_p$$

**اثبات:** برای اثبات به [۱۴] مراجعه کنید.

چون فرض کرده‌ایم سیگنال مطلوب  $s$  تنک از مرتبه  $K$  است بنابراین،  $\sigma_K(s)_1$  برابر با صفر بوده و رابطه (۱۵) به شکل زیر در می‌آید:

$$\|\hat{s} - s\|_2 \leq C_2 \varepsilon \quad (16)$$

اگر بردار نویز گوسی به طول  $N$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد، می‌توان نشان داد که  $\|w\|_2^2$  یک متغیر تصادفی مربعی کای با میانگین  $\sigma^2 N$  و انحراف معیار  $\sigma^2 \sqrt{2N}$  می‌باشد و احتمال این که  $\|w\|_2^2$  از میانگین به‌علاوه ۲ یا ۳ برابر انحراف معیار خود بزرگتر شود کم است بنابراین، می‌توان نوشت [۱۴]:

$$\|w\|_2 \leq \varepsilon \sigma \sqrt{N + 2\sqrt{2N}} \quad (17)$$

<sup>1</sup>Non Polynomial hard

<sup>2</sup>Tractable

<sup>3</sup>Intractable

## ۵. پردازش همدوس

مسئله دیگری که می‌توان در آشکارسازی به روش حسگری فشرده مطرح کرد این است که آیا می‌توان از پردازش همدوس در رادارهای حسگری فشرده نیز استفاده کرد؟ در رادارهای معمولی با انتگرال‌گیری روی  $P$  پالس می‌توان SNR را به نسبت  $P$  بهبود بخشید. بنابراین شاید بتوان در رادارهای حسگری فشرده نیز پردازش همدوس را به کار برد و رویه آشکارسازی را بهبود بخشید. برای استفاده از پردازش همدوس می‌بایست فاز سیگنال-هایی که قرار است با هم پردازش شوند، یکسان باشد. در [۱۳] با بررسی هیستوگرام دامنه-فاز اهداف ساکن بازبازی شده با الگوریتم بازبازی حسگری فشرده، این نتیجه بیان شده که اولاً دامنه و فاز اهداف بازبازی شده از هم مستقل هستند و ثانیاً فاز (به مفهوم میانگین) حفظ می‌شود. بنابراین می‌توان بعد از عملیات بازبازی فشرده از پردازش همدوس استفاده کرد. در اینجا این مسئله را در دو حالت اهداف ساکن و متحرک به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم. به این ترتیب اگر در طی چند burst متوالی فاز سیگنال بازبازی شده از اهداف ثابت بماند، می‌توان بعد از عملیات بازبازی فشرده از پردازش همدوس استفاده کرد. در حالت اهداف متحرک به شرطی پردازش همدوس امکان‌پذیر است که سرعت اهداف به‌گونه‌ای باشد که در زمان لازم برای پردازش همدوس یعنی  $n(N-1)T$ ، هم سرعت آنها ثابت باشد و هم هدف از سلول بُرد اولیه خود خارج نشود یعنی باید داشته باشیم  $vn(N-1)T < \Delta R$  که در آن  $n$  تعداد burstهایی است که روی آنها پردازش همدوس انجام می‌شود.

در صورت خارج شدن هدف از سلول بُرد اولیه، هنگام پردازش همدوس سیگنال هدف با نویز جمع خواهد شد. به‌عنوان نمونه، نمودار دامنه برحسب فاز در حالت اهداف ساکن در شکل (۴-الف) و در حالت اهداف متحرک در شکل (۴-ب) رسم شده است. همان‌طور که از شکل‌ها نیز مشخص است در هر دو حالت فاز اهداف بازبازی شده برابر با صفر و در طی burstهای متوالی ثابت است. بنابراین در هر دو حالت می‌توان از پردازش همدوس استفاده کرد.

به‌ازای هیچ  $K \geq 1$  ویژگی RIP با شرایط قضیه ۲ وجود ندارد. برای تأیید این موضوع، یک شبیه‌سازی به این صورت انجام شد که به‌ازای  $M = 50$  و تعداد پالس‌های متفاوت، ضریب همدوسی ماتریس حسگری را محاسبه کرده و در جدول ۱ آورده شد. همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش تعداد پالس‌ها این ضریب کاهش می‌یابد. همچنین طبق قضیه ۱ دیده می‌شود که برای هر سه تعداد پالس استفاده شده در جدول ۱ ویژگی RIP فقط به‌ازای  $K = 1$  با ثابت  $\delta = 0$  برقرار است. از طرفی طبق قضیه ۲ برای این که تخمینی از کران خطای بازبازی براساس کمینه‌سازی ترم  $\ell_1$  داشته باشیم باید ماتریس حسگری دارای ویژگی RIP از مرتبه  $2K$  با ثابت  $\delta < \sqrt{2} - 1$  باشد که این شرط به‌ازای هیچ  $K \geq 1$  برآورده نمی‌شود و بنابراین نمی‌توان از این قضیه کمک گرفت.

### جدول ۱. ضریب همدوسی ماتریس حسگری و تنکی متناظر با

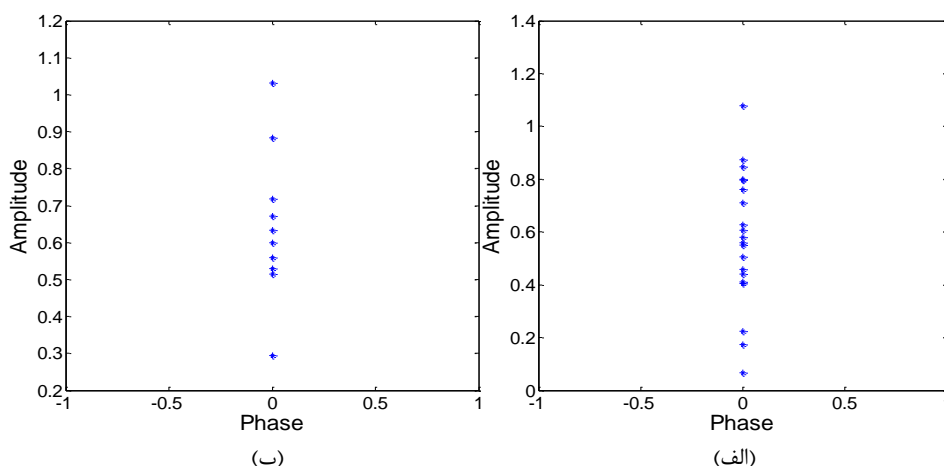
ویژگی RIP در حالت اهداف ساکن

تعداد پالس‌های ارسالی	$N=10$	$N=20$	$N=30$
ضریب همدوسی ماتریس حسگری	$\mu=0/9361$	$\mu=0/7573$	$\mu=0/5049$
تنکی متناظر با شرایط قضیه ۱	$K < 1/0683$	$K < 1/3205$	$K < 1/9806$

در حالت اهداف متحرک نیز شبیه‌سازی را به این صورت انجام داده‌ایم که به‌ازای  $M=40$ ،  $L=6$ ،  $T=0/5 \times 10^{-3}$  و تعداد پالس‌های متفاوت، ضریب همدوسی ماتریس حسگری را محاسبه کرده و در جدول ۲ آورده‌ایم. همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش تعداد پالس‌ها این ضریب کاهش می‌یابد. براساس مقادیر جدول ۲ در این حالت نیز به‌ازای هیچ  $K \geq 1$  شرایط قضیه ۲ برآورده نمی‌شود و بنابراین، نمی‌توان از این قضیه کمک گرفت. بنابراین، در هر دو حالت دیده می‌شود که به‌ازای ضرایب فشرده-سازی مطلوب ما (به‌طور معمول  $\delta = \frac{N}{ML} \leq 0/5$ ) ویژگی RIP با شرایط قضیه ۲ وجود ندارد اما شبیه‌سازی‌ها نشان خواهد داد که با وجود نداشتن ویژگی RIP، اگر  $\sigma_{bpdn}$  را متناسب با انحراف استاندارد نویز یعنی  $\sigma$  انتخاب کنیم، بازبازی با دقت بالا امکان‌پذیر است.

### جدول ۲. ضریب همدوسی ماتریس حسگری و تنکی متناظر با ویژگی RIP در حالت اهداف متحرک.

تعداد پالس‌های ارسالی	$N=50$	$N=70$	$N=100$	$N=120$	$N=150$
ضریب همدوسی ماتریس حسگری	$\mu=0/9505$	$\mu=0/9007$	$\mu=0/7934$	$\mu=0/7014$	$\mu=0/5389$
تنکی متناظر با شرایط قضیه ۱	$K < 1/0521$	$K < 1/1102$	$K < 1/2604$	$K < 1/4257$	$K < 1/8556$



شکل ۴. الف) نمودار دامنه- فاز هدف تخمین زده شده توسط روش 2D-BPDN در بیست burst متوالی. دامنه و فاز صحیح هدف به ترتیب برابر با ۱ و ۰ است.  $N=20$  و  $M=50$  و  $K=1$  و  $SNR=10\text{ dB}$ . ب) نمودار دامنه- فاز هدف تخمین زده شده توسط D-2BPDN در ده burst متوالی. دامنه و فاز صحیح هدف به ترتیب برابر با ۱ و ۰ است.  $N=100$  و  $M=40$  و  $K=1$  و  $SNR=10\text{ dB}$  و  $L=6$ .

همه  $p_{fa}$ ها بالاتر از منحنی به‌ازای سایر مقادیر  $u$  قرار می‌گیرد. از این رو این مقدار برای  $u$  انتخاب‌شده و در سناریوی واقعی از همین مقدار در حل مسأله (۱۴) استفاده می‌شود. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که چنین روندی به کارایی قابل قبول آشکارساز در مقایسه با سایر روش‌های موجود منجر خواهد شد. در طی شبیه‌سازی‌ها مشاهده شد که حساسیت منحنی ROC به تغییرات کوچک  $u$  زیاد نیست و به همین دلیل در مرحله انتخاب  $u$  مقدار  $\sigma_{bpdn}$  به صورت مضارب زوج از  $\sigma$  در نظر گرفته شد.

با فرض فوق، به این صورت عمل می‌کنیم که با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی برای  $\frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$ ، ROCهای حالات مختلف را رسم کرده و سپس آن ضریبی که به ROC بهتری منجر می‌شود را به‌عنوان ضریب مناسب انتخاب می‌کنیم. این روند در حالت اهداف متحرک نیز قابل استفاده خواهد بود. همان‌گونه که گفته شد، نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که ضریب مناسب  $\frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  به تعداد اهداف و مقدار سیگنال به نویز بستگی ندارد.

#### ۴-۱-۲. شبیه‌سازی ROC

برای تعیین ضریب مناسب  $u = \frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  و نشان دادن این‌که این ضریب به SNR بستگی ندارد شبیه‌سازی یک سناریو با پارامترهای جدول ۳ انجام شده است. در تمامی شبیه‌سازی‌های این قسمت از بین  $M$  پالس رادار،  $N$  پالس اول را استفاده کرده و سایر پالس‌ها را حذف کرده‌ایم. ابتدا مقادیر مختلفی برای  $u = \frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  در نظر گرفته و نمودارهای ROC آن‌ها را به‌عنوان نمونه به‌ازای سه SNR مختلف در شکل ۵ رسم کرده‌ایم. با توجه به این شکل می‌توان گفت که در این حالت ضریب مناسب  $u = \frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma} = 2$  می‌باشد و همچنین این ضریب به SNR بستگی ندارد. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که این ضریب به تعداد اهداف نیز بستگی ندارد.

### ۶. نتایج شبیه‌سازی‌ها

#### ۶-۱. کارایی روش پیشنهادی 2D-BPDN در

#### آشکارسازی در راستای بُرد در رادار فرکانس پله‌ای

در این حالت، مسئله به صورت یک‌بعدی است. این حالت در [۱۰]، [۱۱] و [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است. البته الگوریتم 2D-BPDN در حالت یک بعدی همان روش [۱۳] است که ما در این قسمت آنرا شبیه‌سازی کرده و نتایج حاصله را با [۱۰] مقایسه کرده‌ایم. در شبیه‌سازی‌ها، نویز اندازه‌گیری سفید و گوسی فرض شده است.

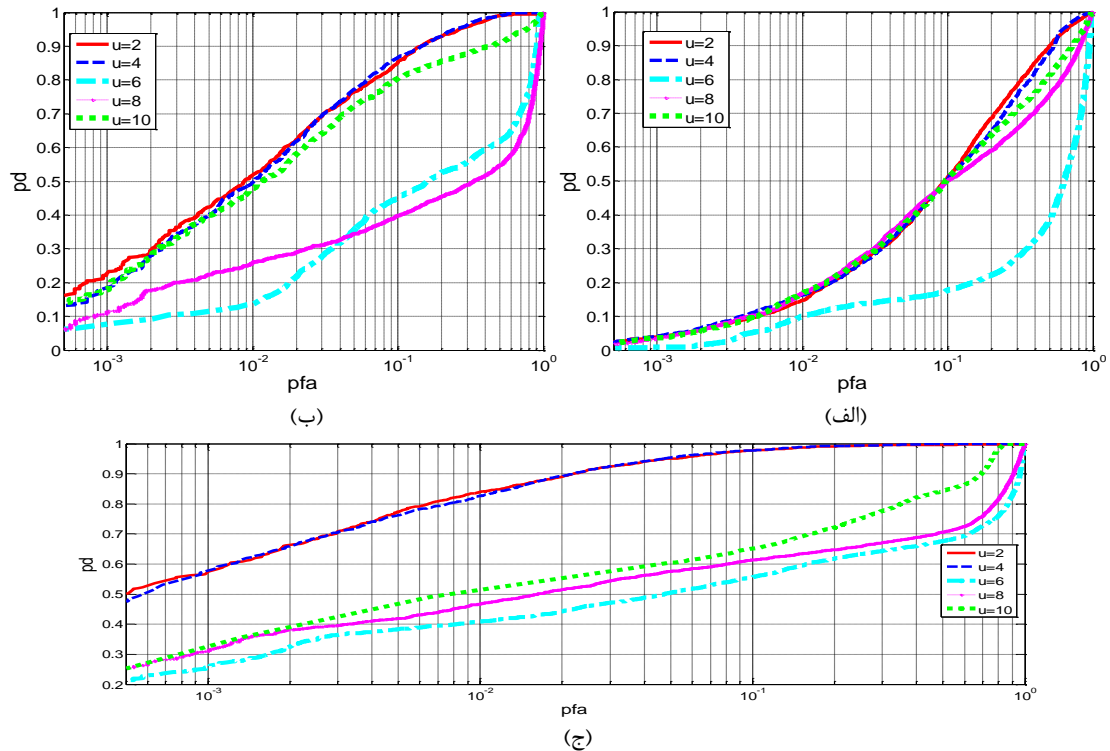
#### ۶-۱-۱. انتخاب پارامتر مناسب در الگوریتم بازیابی

##### تنک

همان‌طور که در بخش ۴ بحث شد علیرغم این‌که ماتریس‌های جزئی فوریه شرایط قضیه ۲ را ارضا نمی‌کنند در این حالت نیز فرض می‌کنیم که  $\sigma_{bpdn}$  ضریبی از  $\sigma$  است. به عبارت دیگر، ایده اصلی این است که با انتخاب  $u$  مناسب و قراردادن  $\sigma_{bpdn} = u\sigma$  می‌توان به کیفیت آشکارسازی مناسب دست یافت. از این رو برای تعیین  $u$  مناسب، آشکارسازی در سناریوهای فرضی مختلفی را بررسی کرده و اثر پارامتر  $u$  را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. شبیه‌سازی‌های گسترده‌ای برای بررسی اثر پارامتر  $u$  انجام شده که بخشی از آن در شکل‌های ۵، ۷ و ۸ آورده شده است. از مجموع شبیه‌سازی‌ها، این نتیجه برای آشکارسازی در رادار فرکانس پله‌ای حاصل می‌شود که (با در نظر گرفتن سناریوی مشخصی برای شکل موج فرستنده از لحاظ تعداد پالس و مقدار پله فرکانس و ...) مستقل از این‌که مقدار SNR یا تعداد اهداف چقدر باشد، منحنی ROC به ازای یک  $u$  مشخص، تقریباً به‌ازای

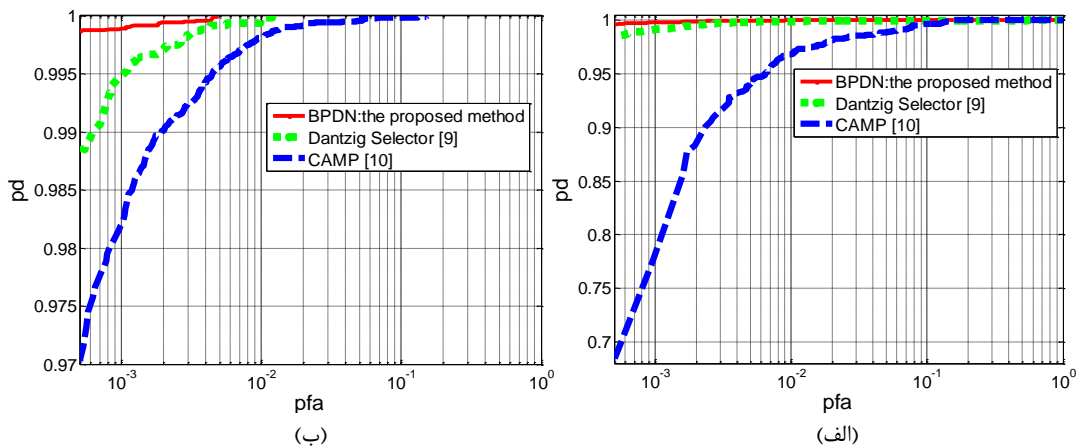
جدول ۳. پارامترهای مربوط به شکل ۵

مقادیر	پارامترها
$M=50$	تعداد سلول‌های بُرد
$N=20$	تعداد فرکانس‌های ارسالی
$f_0=10^6$	فرکانس حامل شروع (Hz)
$\Delta f=10^5$	طول گام فرکانسی (Hz)
$K=3$	تعداد اهداف

شکل ۵. تعیین ضریب مناسب  $\frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  در حالت آشکارسازی در راستای بُرد به‌زای پارامترهای جدول ۳. الف)  $SNR = 0$  dBب)  $SNR = 5$  dB ج)  $SNR = 10$  dB

دیده می‌شود روش پیشنهادی کارایی بهتری نسبت به روش [۱۰-۱۱] دارد و به‌زای تعداد پالس‌های ارسالی کمتر کارایی آن نسبت به این دو روش بهتر نیز می‌شود.

در شکل ۶ نیز نمودار ROC روش ارائه‌شده در [۱۰-۱۱]، را با روش پیشنهادی (۲D-BPDN) در حالت یک بُعدی به‌زای پارامترهای جدول ۴ رسم کرده‌ایم. همان‌طور که



شکل ۶. مقایسه روش ۲D-BPDN با روش ارائه‌شده در [۱۰-۱۱] در حالت آشکارسازی در راستای بُرد. پارامترهای این شکل متناظر با جدول ۴

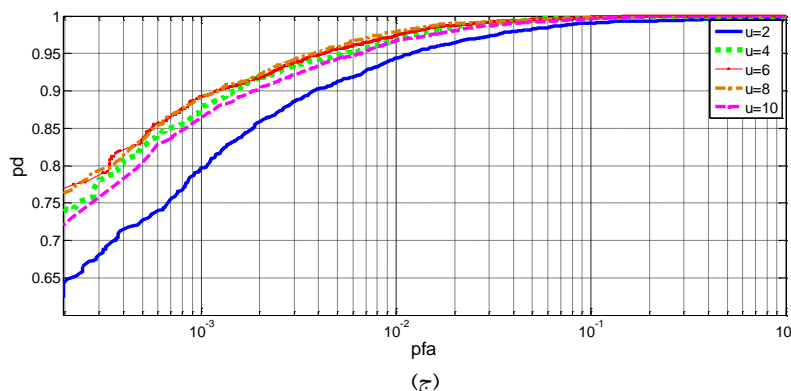
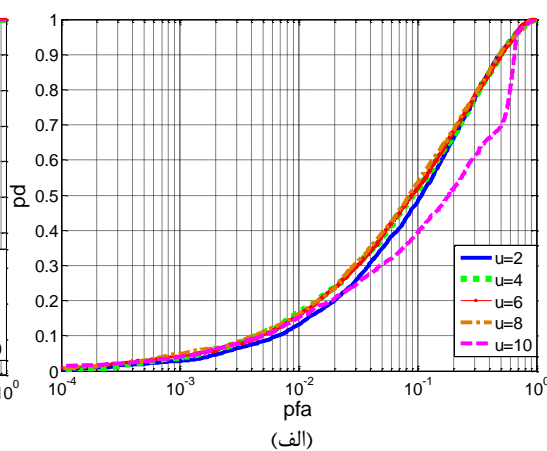
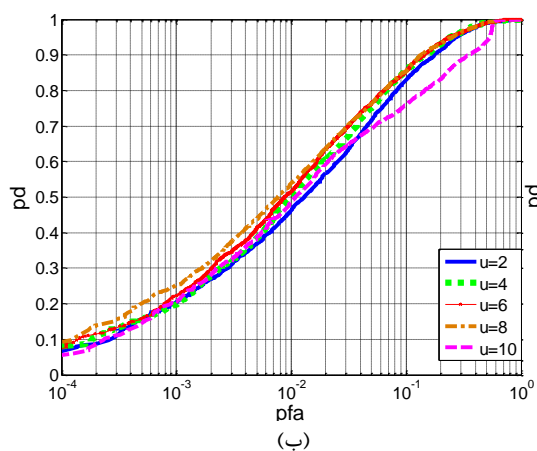
هستند. الف)  $N = 80$  ب)  $N = 120$



در این حالت پارامترها را مطابق جدول ۵ در نظر گرفته و برای نشان دادن این‌که در این حالت نیز ضریب مناسب  $u = \frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  به تعداد اهداف و نسبت سیگنال به نویز که تحت کنترل ما نیست، بستگی ندارد، نمودارهای ROC به‌ازای ضرایب مختلف  $u = \frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  در شکل‌های ۷ و ۸ رسم شده است. با توجه به شکل ۷ می‌توان گفت که ضریب  $u$  به  $SNR$  بستگی ندارد و همچنین براساس شکل ۸ نیز می‌توان دریافت که این ضریب به تعداد اهداف نیز بستگی ندارد. همان‌طور که شکل‌های ۷ و ۸ نشان می‌دهد در این حالت ضریب مناسب به صورت  $u = \frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma} = 8$  است.

جدول ۵. پارامترهای مربوط به شکل‌های ۷ و ۸

مقادیر	پارامترها
M=40	تعداد سلول‌های بُرد
L=6	تعداد سلول‌های سرعت
T=0/5 × 10 <sup>-3</sup>	دوره تناوب تکرار پالس (s)
N=100	تعداد فرکانس‌های ارسالی
f <sub>0</sub> =10 <sup>8</sup>	فرکانس حامل شروع (Hz)
Δf=10 <sup>5</sup>	طول گام فرکانسی (Hz)



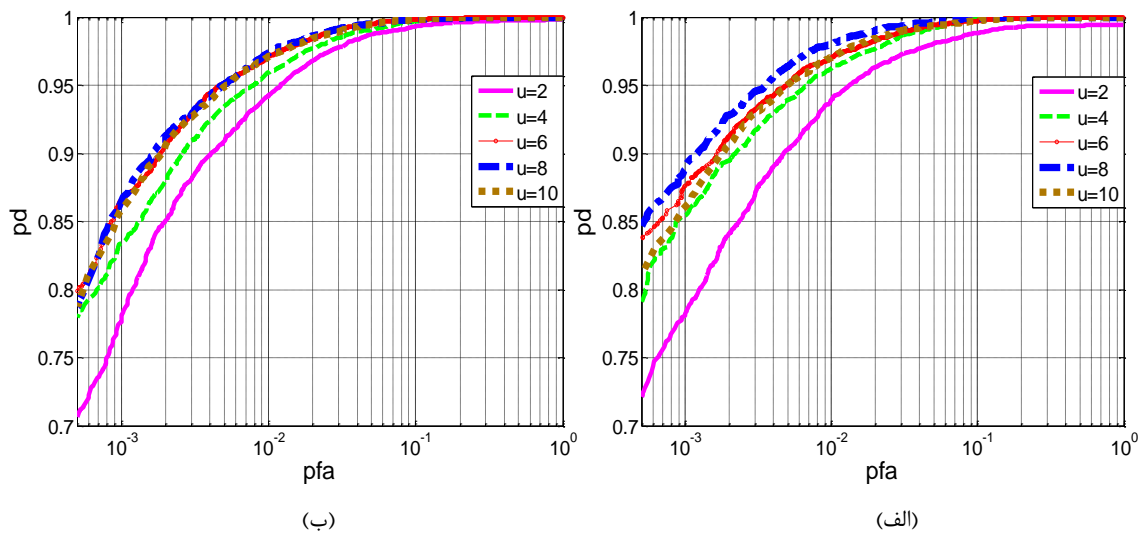
شکل ۷. تعیین ضریب مناسب  $\frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  در حالت آشکارسازی در فضای بُرد-داپلر به ازای پارامترهای جدول ۵. الف) K=5 و SNR=0 dB. ب) K=5 و SNR=5 dB. ج) K=5 و SNR=10 dB.

جدول ۴. پارامترهای مربوط به شکل ۶

مقادیر	پارامترها
M=200	تعداد سلول‌های بُرد
SNR=13dB	نسبت سیگنال به نویز
f <sub>0</sub> =10 <sup>8</sup>	فرکانس حامل شروع (Hz)
Δf=10 <sup>5</sup>	طول گام فرکانسی (Hz)
K=12	تعداد اهداف

## ۲-۶. کارایی روش پیشنهادی 2D-BPDN در فضای بُرد-داپلر در رادار فرکانس پله‌ای

تاکنون تنها روشی که برای آشکارسازی در فضای بُرد-داپلر در رادارهای فرکانس پله‌ای توسط الگوریتم‌های حسگری فشرده ارائه شده است، روش [۱۰] می‌باشد. به همین دلیل در این قسمت به مقایسه نتایج با [۱۰] می‌پردازیم. در تمامی شکل‌های رسم شده در این قسمت، به منظور انجام مقایسه عادلانه فرض شده روش مبتنی بر IDFT از  $ML$  پالس و روش مبتنی بر حسگری فشرده از  $N$  پالس اول از یک مجموعه  $ML$  تایی استفاده می‌کند. همچنین در شبیه‌سازی‌ها، نویز اندازه‌گیری سفید و گوسی فرض شده است.



شکل ۸. تعیین ضریب مناسب  $\frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  در حالت آشکارسازی در فضای بُرد-دابلر به ازای پارامترهای جدول ۵. الف)  $K=8$  و  $SNR=10$  dB. ب)  $K=12$  و  $SNR=10$  dB.

### ۳-۶. تأثیر پردازش همدوس در عملکرد

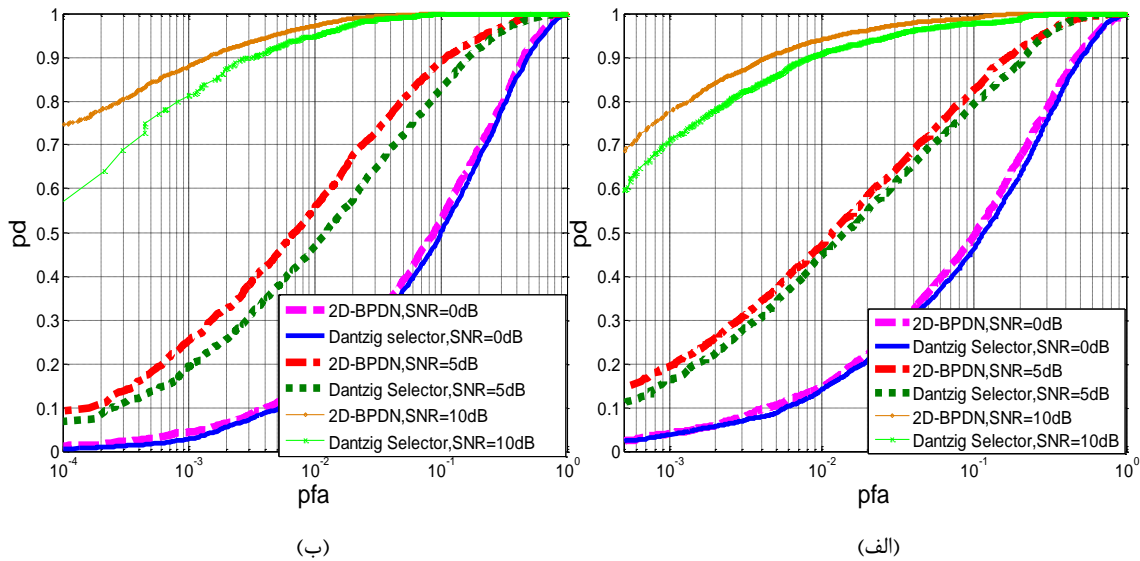
#### آشکارسازهای راداری مبتنی بر حسگری فشرده

همان گونه که در شکل ۴ به عنوان نمونه نشان داده شد، طی عملیات بازیابی فشرده، فاز (میانگین فاز) حفظ می‌شود. در نتیجه می‌توان برای افزایش احتمال آشکارسازی و کاهش احتمال هشدار غلط یا بطور متناظر بهبود SNR، بعد از بازیابی حسگری فشرده از پردازش همدوس استفاده کرد. برای مشاهده تأثیر پردازش همدوس روی نمودار ROC شبیه‌سازی‌هایی با پارامترهای جدول ۵ و تعداد اهداف  $K=5$  و  $SNR=0$  dB انجام داده‌ایم. در قسمت ۶-۲ دیدیم که به ازای این پارامترها ضریب مناسب به صورت  $u=8$  می‌باشد. برای این‌که تأثیر پردازش همدوس را روی نمودار ROC ببینیم فرض کرده‌ایم که تعداد پالس‌های دریافتی از هر هدف، ده است و همچنین روی ده دسته پالس (sweep) عملیات انتگرال‌گیری همدوس را انجام داده‌ایم. در شکل ۱۰ حالت بدون انتگرال‌گیری و انتگرال‌گیری همدوس روی ده دسته پالس (sweep) را رسم کرده‌ایم. الگوریتم بازیابی استفاده شده در اینجا الگوریتم ۲D-BPDN است. طبق این شکل دیده می‌شود که با انتگرال‌گیری همدوس بهبود قابل توجهی در نمودار ROC رخ داده است.

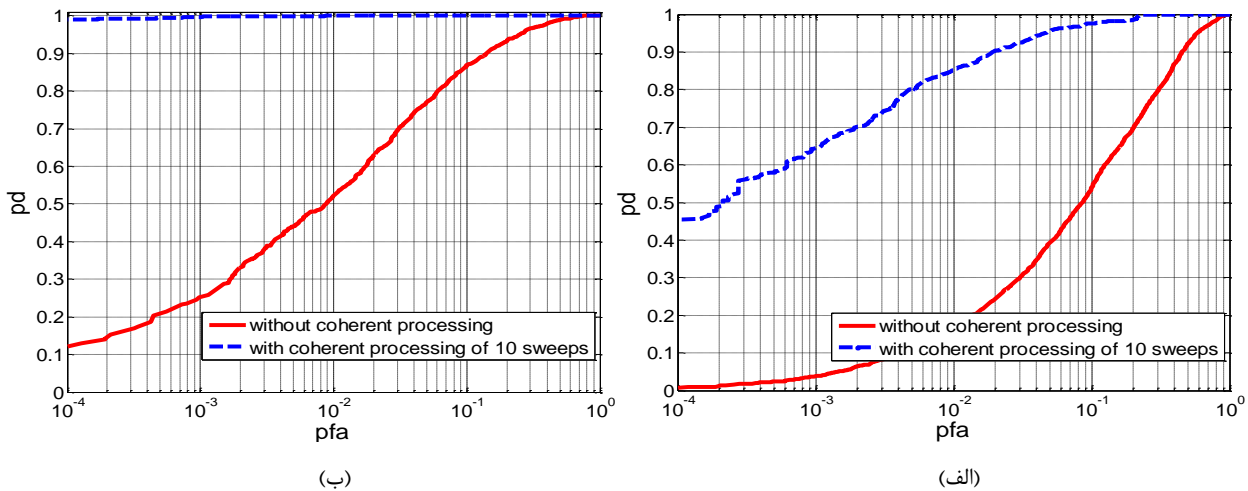
برای مقایسه کارایی روش پیشنهادی و روش Dantzig Selector دو شبیه‌سازی با پارامترهای جدول ۶ و تعداد پالس  $N=70$  و  $N=100$  انجام داده و نتیجه آنرا در شکل ۹ رسم کرده‌ایم. همان‌طور که از این شکل مشخص است کارایی روش D-Selector خصوصاً در  $pfa$  های کوچکتر بهتر از روش Dantzig می‌باشد.

جدول ۶. پارامترهای مربوط به شکل ۹

مقادیر	پارامترها
$M=40$	تعداد سلول‌های بُرد
$L=6$	تعداد سلول‌های سرعت
$T=0.5 \times 10^{-3}$	دوره تناوب تکرار پالس (s)
$f_0=10^8$	فرکانس حامل شروع (Hz)
$\Delta f=10^5$	طول گام فرکانسی (Hz)
$K=5$	تعداد اهداف



شکل ۹. مقایسه روش ۲D-BPDN با روش ارائه شده در [۱۰] در حالت آشکارسازی در فضای بُرد-داپلر. پارامترهای این شکل مطابق جدول ۶ هستند. الف)  $N = 70$ . ب)  $N = 100$ .



شکل ۱۰. تأثیر انتگرال‌گیری همدوس روی نمودار ROC. پارامترهای شکل متناظر با جدول ۵ هستند. الف)  $K=5$  و  $SNR=0dB$ . ب)  $K=5$  و  $SNR=5dB$ .

#### ۴-۶. حذف پالس به صورت هدفمند

در رادارهای فرکانس پله‌ای معمولی تعداد فرکانس‌های ارسالی یعنی  $N$  برای حفظ پهنای باند مؤثر و بیشترین بُرد بدون ابهام و قدرت تفکیک رادار باید برابر با تعداد سلول‌های بُرد یعنی  $M$  باشد. برای رسیدن به اندازه‌گیری‌های راداری فشرده در [۱۰] تعداد پالس‌های ارسالی از  $M$  به  $N$  تغییر یافته است. به این صورت که  $N$  پالس اول حفظ شده و سایر پالس‌ها حذف گردیده است. اشکال این روش در این است که با حذف پالس‌ها به این صورت، پهنای باند مؤثر رادار کم شده و در نتیجه قدرت تفکیک بالای رادارهای فرکانس پله‌ای از دست خواهد رفت. در این قسمت از

حذف هدفمند پالس به شیوه‌ای مشابه با [۱۱]، که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم، استفاده می‌کنیم. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که روش پیشنهادی مشکل روش قبلی را ندارد و در مقایسه با روش IDFT و روش [۱۰] عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. در روش پیشنهادی به این صورت عمل می‌کنیم که از  $M$  پالس رادار،  $N$  پالس با محدودیت‌های زیر به عنوان پالس‌های ارسالی رادار انتخاب می‌کنیم:

الف) پالس‌های اول و آخر را برای حفظ پهنای باند مؤثر رادار و در نتیجه قدرت تفکیک آن حفظ می‌کنیم.

ب) حداقل دو پالس متوالی با فاصله  $\Delta f$  از همدیگر برای حفظ

به این ترتیب قدرت تفکیک روش ارائه شده در [۱۰] برابر با  $\Delta R_1 = 75m$  و قدرت تفکیک روش پیشنهادی برابر با  $\Delta R_2 = 37/5m$  خواهد شد. برای نشان دادن این مطلب  $K=2$  هدف ساکن در بُردهای  $R_1 = 187/5$  و  $R_2 = 225$  قرار داده و دامنه سیگنال بازسازی شده از هدف برحسب بُرد را براساس این دو روش در شکل ۱۱ رسم کرده‌ایم. همانطور که از شکل مشخص است روش [۱۰] نتوانسته است بین دو هدف تفکیک قائل شود درحالی‌که روش پیشنهادی هر دو هدف را بدرستی تشخیص داده است. همین قضیه برای روش IDFT با حذف پالس به شیوه هدفمند و غیر هدفمند نیز تکرار می‌شود.

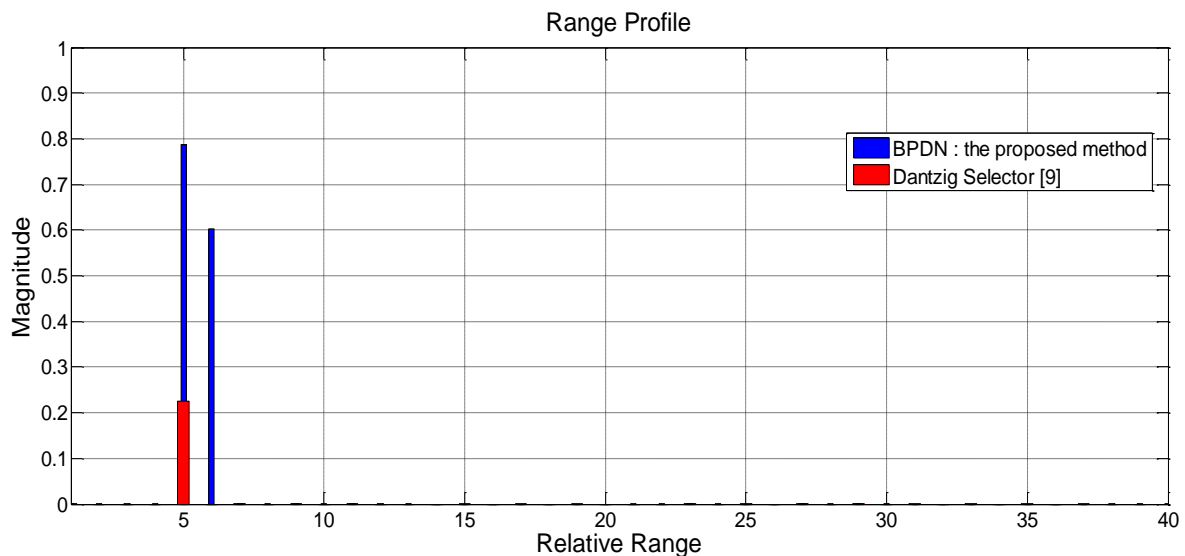
برای بررسی کارایی روش پیشنهادی در آشکارسازی اهداف ساکن پارامترها را مطابق جدول ۸ در نظر گرفته و نمودارهای ROC را به‌ازای نرخ‌های مختلف  $\frac{M}{N} = 1, 2, 4, 8$  در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ رسم کرده‌ایم.

بیشترین بُرد بدون ابهام رادار نگهداری می‌کنیم.

روش استفاده شده در اینجا برای بازیابی حسگری فشرده، روش Dantzig Selector است. برای مقایسه روش پیشنهادی با روش حذف پالس به شیوه غیرهدفمند شبیه‌سازی با پارامترهای جدول ۷ انجام شده است.

جدول ۷. پارامترهای مربوط به شکل ۱۱

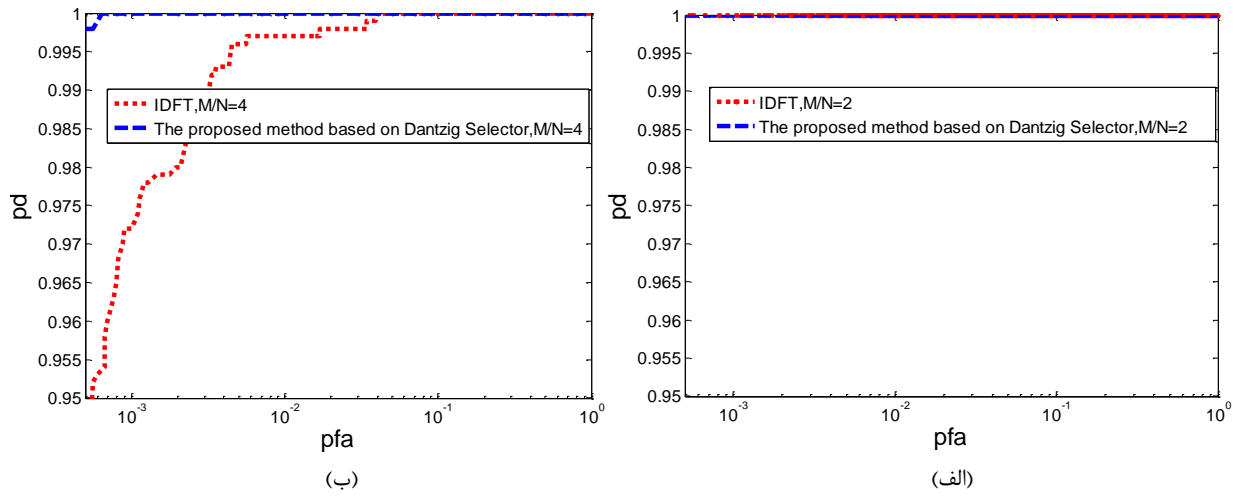
مقادیر	پارامترها
$M=40$	تعداد سلول‌های بُرد
$N=20$	تعداد فرکانس‌های ارسالی
$f_0=10^8$	فرکانس حامل شروع (Hz)
$\Delta f=10^5$	طول گام فرکانسی (Hz)
$K=2$	تعداد اهداف



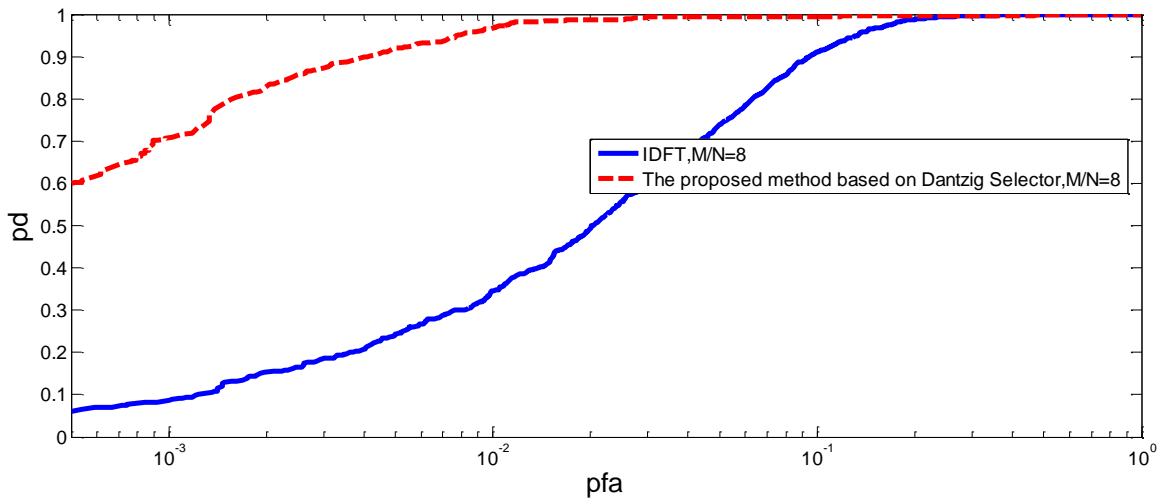
شکل ۱۱. دامنه سیگنال بازیابی شده از هدف برحسب بُرد توسط Dantzig Selector در دو حالت حذف پالس به شیوه هدفمند (Proposed Approach) و غیر هدفمند [۱۰]

جدول ۸. پارامترهای مربوط به شکل‌های ۱۲ و ۱۳

مقادیر	پارامترها
$M=40$	تعداد سلول‌های بُرد
$f_0=10^8$	فرکانس حامل شروع (Hz)
$\Delta f=10^5$	طول گام فرکانسی (Hz)
$K=1$	تعداد اهداف
$SNR=5dB$	نسبت سیگنال به نویز



شکل ۱۲. نمودار ROC برای هدف ساکن برای روش IDFT مرسوم و روش حسگری فشرده مبتنی بر Dantzig Selector (الف)  $\frac{M}{N}=2$  (ب)  $\frac{M}{N}=4$



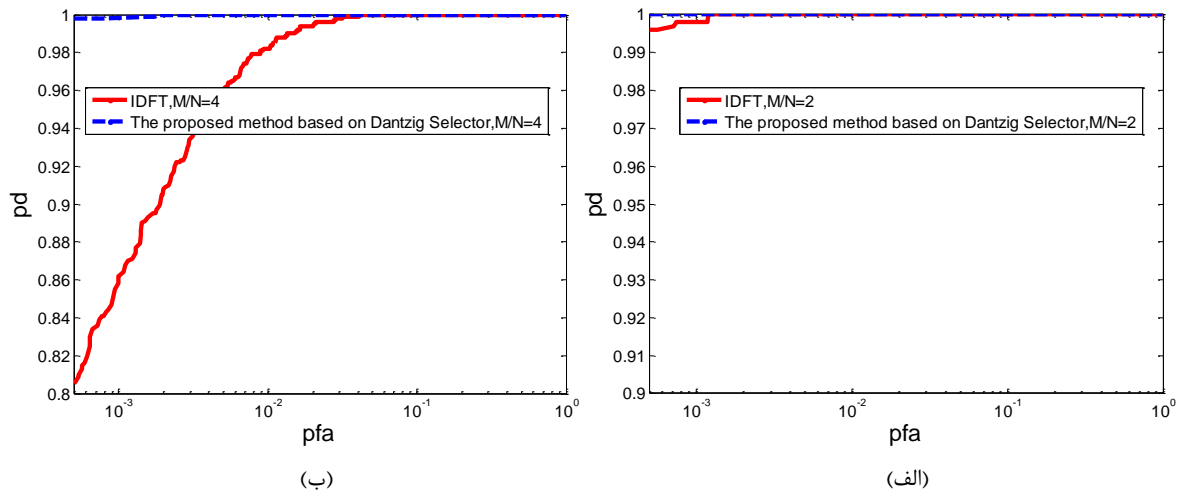
شکل ۱۳. نمودار ROC برای هدف ساکن و نرخ فشرده‌سازی  $\frac{M}{N}=8$  برای روش IDFT مرسوم و روش حسگری فشرده مبتنی بر Dantzig Selector

جدول ۹ در نظر گرفته و نمودارهای ROC را به‌ازای نرخ‌های  $\frac{M}{N}=2, 4, 8$  در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ رسم نموده‌ایم.

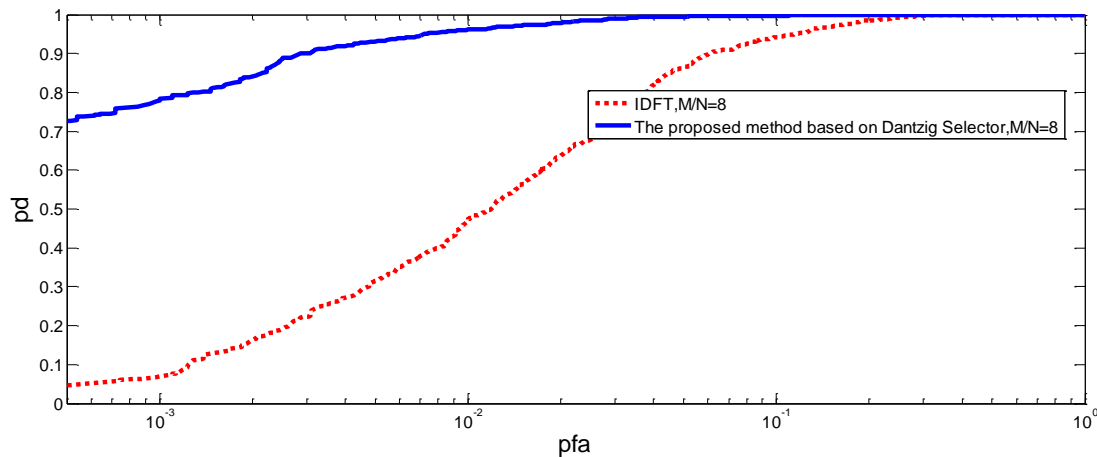
کارایی روش پیشنهادی در آشکارسازی اهداف متحرک نیز مورد بررسی قرار گرفته است. برای این کار پارامترها را مطابق

جدول ۹. پارامترهای مربوط به شکل‌های ۱۴ و ۱۵

مقادیر	پارامترها
$M=40$	تعداد سلول‌های بُرد
$f_0=10^8$	فرکانس حامل شروع (Hz)
$\Delta f=10^5$	طول گام فرکانسی (Hz)
$K=1$	تعداد اهداف
$SNR=5dB$	نسبت سیگنال به نویز
$L=1$	تعداد سلول‌های سرعت
$T=10^{-3}$	دوره تناوب تکرار پالس (s)



شکل ۱۴. نمودار ROC برای هدف با سرعت  $v = 20 \text{ m/s}$  در روش IDFT و روش حسگری فشرده مبتنی بر Dantzig Selector (الف)  $\frac{M}{N} = 2$  (ب)  $\frac{M}{N} = 4$



شکل ۱۵. نمودار ROC برای هدف با سرعت  $v = 20 \text{ m/s}$  و نرخ  $\frac{M}{N} = 8$  برای روش IDFT و روش حسگری فشرده مبتنی بر Dantzig Selector

نسبی دارد. به علاوه قدرت تفکیک اهداف نسبت به روش مرسوم IDFT بهبود یافته است. پارامتر مهم دیگری که در آشکارسازی اهمیت دارد میزان پیچیدگی محاسباتی است. همان گونه که در بخش ۴-۲ گفته شد، روند آشکارسازی بر مبنای حل مسأله بهینه‌سازی رابطه (۱۴) است. در این مقاله برای حل مسأله بهینه‌سازی در تمامی روش‌ها، از بسته نرم افزاری CVX استفاده شده است. مشخصات پردازنده مورد استفاده در جدول ۱۰ ارائه شده است.

نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که روش پیشنهادی نسبت به روش مرسوم IDFT خصوصاً در آشکارسازی اهداف متحرک، از لحاظ عملکرد آشکارساز و قدرت تفکیک و نسبت به روش [۱۰] از نظر قدرت تفکیک عملکرد بهتری دارد.

## ۵-۶. پیچیدگی محاسباتی

همان گونه که از نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده در شکل ۹ دیده می‌شود، روش پیشنهادی نسبت به روش ارائه شده در [۱۰] بهبود

جدول ۱۰. مشخصات سامانه پردازشگر استفاده شده

مقادیر	پارامترها
Fujitsu Lifebook SH531/GFX	System model
۶۴-bit operating system	Operating system
۲/۴GHz-۲cores	CPU
۴GB	RAM
NVIDIA GeForce ۴۱۰M ۱GB	Graphic

حدود ۲۷٪ از زمان اجرای روش ارائه شده در [۱۰] کمتر است. این کاهش پیچیدگی می‌تواند به این دلیل باشد که در مرحله بازیابی الگوریتم پیشنهادی از نُرم  $\ell_1$  اما در الگوریتم Dantzig Selector از نُرم  $\infty$  استفاده شده است.

به ازای پارامترهای جدول ۱۱، در شرایط یکسان زمان اجرای یک مرحله آشکارسازی روش ارائه شده در [۱۰] و روش پیشنهادی (۲D-BPDN)، به منظور آشکارسازی در ۵۰ سلول بُرد-داپلر دست آمده و نتیجه در سطر آخر جدول ارائه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود زمان اجرای الگوریتم پیشنهادی

جدول ۱۱. پارامترهای راداری و زمان اجرای الگوریتم آشکارسازی روش [۱۰] و روش 2D-BPDN

مقادیر	پارامترها
$M=50$	تعداد سلول‌های بُرد
$N=10$	تعداد فرکانس‌های ارسالی
$f_0=10^3$	فرکانس حامل شروع (Hz)
$\Delta f=10^5$	طول گام فرکانسی (Hz)
$K=3$	تعداد اهداف
$SNR=5dB$	ضریب سیگنال به نویز
$1/4093s$	زمان اجرای آشکارسازی در ۵۰ سلول بُرد-داپلر از روش [۱۰]
$1/1100s$	زمان اجرای آشکارسازی در ۵۰ سلول بُرد-داپلر از روش پیشنهادی (۲D-BPDN)

## ۷. نتیجه گیری

در این مقاله روشی جدید به نام روش ۲D-BPDN برای آشکارسازی اهداف متحرک در رادارهای فرکانس پله‌ای از روی اندازه‌گیری‌های فشرده راداری ارائه گردید. نشان داده شد که در صورتی که برای خطای بازیابی یا آستانه  $\sigma_{bpdn}$ ، در الگوریتم پیشنهادی ضریبی از انحراف استاندارد نویز باشد می‌توان به نتایج مناسبی دست یافت. برای یافتن ضریب مناسب  $u = \frac{\sigma_{bpdn}}{\sigma}$  مقادیر مختلفی در نظر گرفته و ضریبی را که به بهترین ROC منجر می‌شد به‌عنوان ضریب مناسب انتخاب کردیم. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان داد که روش ۲D-BPDN نسبت به روش‌های ارائه‌شده قبلی خصوصاً در  $pfa$ های کوچک کارایی بسیار بهتری در آشکارسازی اهداف متحرک دارد. مفهوم پردازش همدوس در رادارهای حسگری فشرده نیز بررسی شد و نشان داده شد که به شرط ثابت بودن سرعت اهداف در طی چند burst متوالی می‌توان بعد از عملیات بازیابی فشرده از پردازش همدوس برای بهبود کارایی آشکارسازی‌های راداری مبتنی بر حسگری فشرده استفاده کرد. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که پردازش همدوس می‌تواند آشکارسازی اهداف متحرک را به طور قابل توجهی بهبود ببخشد. همچنین در این مقاله حذف پالس به شیوه هدفمند بررسی و نشان داده شد که علیرغم حذف تعدادی از پالس‌ها، می‌توان قدرت تفکیک بالای رادارهای فرکانس پله‌ای را حفظ کرد.

## ۸. مراجع

- [1] J. D. Taylor, "Ultra-Wideband Radar Technology"; Press: CRC, 2001.
- [2] R. Mohseni, R. Mansori, "Moving Target Detection in Stepped Frequency Radar Using DCFT," Journal of Radar, Vol. 2, No. 1, pp. 1-9, 2014. (in Persian)
- [3] E. Candès, T. Tao, "Near Optimal Signal Recovery from n Random Projections: Universal Encoding Strategies?," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 52, no. 12, pp. 5406 – 5425, 2006.
- [4] D. L. Donoho, "Compressed Sensing," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 52, no. 4, pp. 1289 - 1306, 2006.
- [5] R. G. Baraniuk, "Compressive Sensing," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 24, no. 4, pp. 118 - 121, 2007.
- [6] R. G. Baraniuk, T. P. H. Steeghs, "Compressive Radar Imaging", In Proc. of IEEE Conf. on Radar. 2007, 128–133.
- [7] M. A. Herman, T. Strohmer, "High-Resolution Radar Via Compressed Sensing," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, no. 6, pp. 2275 - 2284, 2009.
- [8] Y. Wang, G. Leus, A. Pandharipande, "Direction Estimation Using Compressive Sampling Array Processing", In Proc. of 15th IEEE Workshop on Statistical Signal Process. 2009, 626-629.
- [9] J. H. G. Ender, "On Compressive Sensing Applied to Radar," Elsevier Journal of Signal Processing, vol. 90, no. 5, pp. 1402 - 1414, 2010.
- [10] S. Shah, Y. Yu, A. Petropulu, "Step-Frequency Radar with Compressive Sampling SFR-CS", In Proc. of the 35th Int. Conf. on Acoustics Speech and Signal Proc. 2010, 0886-0889.

ابتدا در لم پ-۱ ثابت می‌کنیم که ماکزیمم همدوسی بین ستون‌های ماتریس جزئی فوریه با فرض  $i < k$  در حالت  $k = i + 1$  اتفاق می‌افتد یعنی ماکزیمم همدوسی بین ستون‌های متوالی است.

لم پ-۱: ماکزیمم همدوسی بین ستون‌ها در ماتریس‌های جزئی فوریه بین ستون‌های همسایه اتفاق می‌افتد.

اثبات: با جایگذاری رابطه (پ-۴) در (پ-۳) و قرار دادن  $\Delta R = c/2M\Delta f$  و  $m=1,2,\dots,N$  و  $f_m = f_1 + (m-1)\Delta f$  و کمی ساده‌سازی داریم:

$$\mu_{i,k} = \frac{1}{N} \left| \frac{e^{-j2\pi\frac{N}{M}(i-k)} - 1}{e^{-j2\pi\frac{N}{M}(i-k)} - 1} - 1 \right| \quad (\text{پ-}\delta)$$

تعریف می‌کنیم  $x \triangleq i - k$  با این تعریف چون فرض کرده بودیم  $i < k$  است،  $x$  تنها می‌تواند مقادیر ۱ تا  $M-1$  را اختیار کند. با جایگذاری  $x$  در رابطه (پ-۵) داریم:

$$\mu = \mu(x) = \frac{1}{N} \left| \frac{e^{-j2\pi\frac{N}{M}x} - 1}{e^{-j2\pi\frac{N}{M}x} - 1} - 1 \right| \quad (\text{پ-}\epsilon)$$

می‌توان به جای ماکزیمم‌سازی  $\mu$ ، مربع آن یعنی  $\mu^2$  را ماکزیمم کرد. با به توان ۲ رساندن طرفین رابطه (پ-۶) و کمی ساده‌سازی می‌توان نوشت:

$$\mu^2 = \frac{\sin^2(\pi\frac{N}{M}x)}{N^2 \sin^2(\frac{\pi}{M}x)} \quad (\text{پ-}\gamma)$$

این تابع در حقیقت نمونه‌های تابع سینک پیوسته  $(\frac{\sin(\pi\frac{N}{M}t)}{\pi\frac{N}{M}t})^2$  می‌باشد و در نتیجه ماکزیمم آن در  $x=0$  اتفاق می‌افتد اما طبق تعریف ما  $x$  تنها می‌تواند مقادیر ۱ تا  $M-1$  را اختیار کند. ماکزیمم تابع  $\text{sinc}(\frac{N}{M}x)$  با فرض‌های ما یعنی  $N < M$  و  $x=1,2,\dots,M-1$  به‌ازای  $x=1$  رخ می‌دهد چون تابع  $\text{sinc}(x)$  در بازه  $(0,1)$  نزولی است. و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

حال با فرض  $k = i + 1$  می‌توان نوشت:

$$R_i - R_k = -\Delta R \quad (\text{پ-}\lambda)$$

با جایگذاری رابطه (پ-۸) در (پ-۳) و قرار دادن  $\Delta R = c/2M\Delta f$  و  $m=1,2,\dots,N$  و  $f_m = f_1 + (m-1)\Delta f$  و محاسبات ریاضی داریم:

$$\mu = \max_{i,k} \mu_{i,k} = \frac{1}{N} \left| \frac{e^{-j2\pi\frac{N}{M}} - 1}{e^{-j2\pi\frac{N}{M}} - 1} - 1 \right| \quad (\text{پ-}\theta)$$

با به توان دو رساندن رابطه (پ-۹) و مقداری ساده‌سازی می‌توان نوشت:

- [11] L. Anitori, A. Maleki, M. Otten, "Design and Analysis of Compressed Sensing Radar Detectors," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 61, no. 4, pp. 813 - 827, 2013.
- [12] Y. Yu, A. P. Petropulu, H. V. Poor, "CSSF MIMO Radar: Compressive-Sensing and Step-Frequency Based MIMO radar," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 48, no. 2, pp. 1490 - 1504, 2012.
- [13] L. Anitori, M. Otten, P. Hoogeboom, "Detection Performance of Compressive Sensing Applied to Radar", In Proc. of IEEE Conf.on Radar. 2011, 200-205.
- [14] E. Candès, J. Romberg, T. Tao, "Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements," Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 59, no. 8, pp. 1207 - 1223, 2006.
- [15] E. Candès, T. Tao, "The Dantzig Selector: Statistical Estimation when p is Much Larger than n," The Annals of Statistics, vol. 35, no. 6, pp. 2313-2351, 2007.
- [16] S. S. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders, "Atomic Decomposition by Basis Pursuit," SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 20, no. 1, pp. 33-61, 1998.
- [17] E. J. Candès, T. Tao, "Decoding by Linear Programming," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 51, no. 12, pp. 4203-4215, 2005.
- [18] D. L. Donoho, M. Elad, "Maximal Sparsity Representation via Minimization," Proceedings of National Academy of Sciences USA, vol. 100, no. 5, pp. 2197-2202, 2003.
- [19] R. A. Horn, C. R. Johnson, "Matrix Analysis"; Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1985.

## پیوست ۱:

در این قسمت نشان می‌دهیم که ماتریس‌های جزئی فوریه به‌ازای ضرایب فشرده‌سازی مطلوب ما یعنی  $\delta = \frac{N}{M} \leq 0.5$  ویژگی RIP را ارضا نمی‌کنند. با توجه به نرمالیزه بودن ستون‌های ماتریس حسگری ما ضریب همدوسی بین ستون‌های  $\lambda_m$  و  $k_m$  به صورت زیر است:

$$\mu_{i,k} = |\langle \psi_i, \psi_k \rangle| \quad (\text{پ-}\alpha)$$

که در آن  $\psi_i$  و  $\psi_k$  به شکل زیر هستند:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} e^{j\frac{4\pi}{c}f_1 R_i} \\ \vdots \\ e^{j\frac{4\pi}{c}f_N R_i} \end{bmatrix}, \quad \psi_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} e^{j\frac{4\pi}{c}f_1 R_k} \\ \vdots \\ e^{j\frac{4\pi}{c}f_N R_k} \end{bmatrix} \quad (\text{پ-}\beta)$$

به این ترتیب با جایگذاری رابطه (پ-۲) در (پ-۱) می‌توان

نوشت:

$$\mu_{i,k} = \frac{1}{N} \left| e^{j\frac{4\pi}{c}f_1(R_i-R_k)} + e^{j\frac{4\pi}{c}f_2(R_i-R_k)} + \dots + e^{j\frac{4\pi}{c}f_N(R_i-R_k)} \right| \quad (\text{پ-}\gamma)$$

با توجه به این‌که  $R_k = R_1 + (k-1)\Delta R$  و  $R_i = R_1 + (i-1)\Delta R$

$\Delta R$  می‌باشد، داریم:

$$R_i - R_k = (i - k)\Delta R \quad (\text{پ-}\delta)$$



$$\mu^2 = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2(\pi \frac{N}{M})}{\sin^2(\frac{\pi}{M})} \quad (\text{پ-۱۰})$$

با فرض کوچک بودن  $x$  می‌توانیم تابع سینوسی ظاهر شده در مخرج را با کمانش تقریب بزنیم. اگر  $x < 6^\circ$  باشد،  $\sin(x) \approx x$ . طبق رابطه  $R/\pi = D/180$  که در آن  $R$  اندازه زاویه برحسب رادیان و  $D$  اندازه زاویه برحسب درجه است، داریم:

$$D = \frac{180}{M} \quad (\text{پ-۱۱})$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$D < 6 \Rightarrow M > 30 \quad (\text{پ-۱۲})$$

یعنی شرط لازم برای صحت این تقریب این است که  $M > 30$  باشد که در عمل این شرط قطعاً برآورده می‌شود.

حال با فرض  $M > 30$  رابطه (پ-۱۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\mu^2 \approx \frac{\sin^2(\pi \frac{N}{M})}{\pi^2 \frac{N^2}{M^2}} \Rightarrow \mu \approx \frac{|\sin(\pi \frac{N}{M})|}{\pi \frac{N}{M}} = \frac{\sin(\pi \frac{N}{M})}{\pi \frac{N}{M}} \quad (\text{پ-۱۳})$$

که تساوی آخر در رابطه (پ-۱۳) به این دلیل است که در کار بُرد ما  $N$  کمتر از  $M$  است، به عبارت دیگر:

$$\frac{N}{M} < 1 \Rightarrow \pi \frac{N}{M} < \pi \Rightarrow \sin\left(\pi \frac{N}{M}\right) > 0 \quad (\text{پ-۱۴})$$

با تعریف  $\rho \triangleq \frac{N}{M}$  براساس رابطه (پ-۱۳) می‌توان نوشت:

$$\mu = \text{sinc}(\rho) \quad (\text{پ-۱۵})$$

علاقمندیم  $\rho \leq 0.5$  باشد. چون تابع سینک در بازه  $[0, 0.5]$  تابعی نزولی است پس کمینه آن در  $\rho = 0.5$  اتفاق می‌افتد. بنابراین داریم:

$$\mu(0.5) = \text{sinc}(0.5) \approx 0.6366 \quad (\text{پ-۱۶})$$

پس برای  $\rho \leq 0.5$  مقدار همدوسی ماتریس حسگری به صورت  $\mu > 0.6$  می‌باشد. و این بدین معنی است که ماتریس‌های جزئی فوریه شرایط قضیه ۲ را برآورده نمی‌کنند و بنابراین نمی‌توان از این قضیه کرانی برای خطای بازبازی براساس کمینه سازی نُرم  $\ell_1$  ارائه کرد.

در حالت اهداف متحرک نیز می‌توان تحلیل مشابهی البته با پیچیدگی بیشتر انجام داد و ثابت کرد که در این حالت نیز ماتریس‌های جزئی فوریه شرایط قضیه ۲ را ارضا نمی‌کنند. در این مقاله این موضوع را در بخش ۴ توسط شبیه‌سازی نشان داده‌ایم. نتیجه نهایی این است که در هر دو حالت اهداف ساکن و متحرک، شرایط قضیه ۲ ارضا نمی‌شود.

## **Moving Target Detection in Stepped Frequency Radars using Compressive Sensing**

**M. H. Aghababae, M. F. Sabahi\*, A. R. Forouzan**

University of Isfahan

(Received: 04/06/2015, Accepted: 14/09/2016)

### **Abstract**

Stepped frequency radars attract many attentions due to their high range resolution. Conventional processing technique in these radars is based on the IDFT. In detecting moving targets, the IDFT has the problems of range shifting and range spreading, which result in degrading target amplitude, loss of range accuracy and range resolution. To overcome these problems, the velocity compensation method is used. Since the target velocity is unknown, one should compensate the received signal with all possible velocities and choose the one with the highest and sharpest IDFT output. In this paper, by using the compressive sensing based algorithms, a new method for determining the range and the velocity of moving targets in the stepped frequency radar is proposed. The results show that the proposed method does not have any problem with range shifting and range spreading, and has a better performance compared with other methods in literature. Coherent processing concept is also investigated. Simulations show that using the coherent processing, the performance of compressive sensing based radar detectors is considerably improved.

**Keywords:** Compressive Sensing, Stepped Frequency Radar, High Resolution Radar

---

\* Corresponding author E-mail: sabahi@eng.ui.ac.ir