

مکان‌یابی غیرفعال پرسشگر رادار نظارتی ثانویه

مرتضی عبیدی^{۱*}، یاسر نوروزی^۲، امید سلیمی^۳

۱- کارشناسی ارشد، ۲- استادیار، ۳- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(دریافت: ۹۳/۱۱/۱۹، پذیرش: ۹۴/۱۰/۱۸)

چکیده

با توجه به گسترش روزافزون رفت و آمد هوایی، کنترل ترافیک هوایی از اهمیت بالایی برخوردار است. سامانه رادار نظارتی ثانویه سامانه‌ای است که این کار را انجام می‌دهد. در این مقاله روشی جدیدی برای یافتن موقعیت رادار این سامانه ارائه شده است که تنها با استفاده از یک گیرنده و به صورت غیرفعال انجام می‌شود. این کار از طریق اطلاعات زاویه رادار و تفاضل زمانی صورت می‌گیرد. نحوه تعیین زاویه مورد نظر و محاسبه تفاضل زمانی از روی داده‌های دریافتی شرح داده شده است. با این اطلاعات حل بسته‌ای در مختصات قطبی ارائه شده و حساسیت آن سنجیده شده است. سپس تخمین حداکثر احتمال مکان هدف ارائه شده و بعد به خطی‌سازی معادلات زاویه و تفاضل زمانی پرداخته شده و تخمین حداقل مربعات خطای وزن دار هم تعیین شده است. این مقاله به طور عملی آزمایش شده و نتایج آن آورده شده است.

کلید واژه‌ها

مکان‌یابی غیرفعال، رادارهای نظارتی ثانویه، تفاضل زمانی، اطلاعات زاویه، تخمین حداکثر احتمال، حداقل مربعات خطای وزن دار.

۱. مقدمه

هدف می‌پردازند. در [۲] روش جدیدی برای مکان‌یابی یک گسیلنده از روی اطلاعات فاز ارائه شده است. همچنین در مقالات گوناگونی از ترکیب این روش‌ها نیز برای صورت مساله‌های مختلف استفاده شده است. در [۳-۵] براساس ترکیب زاویه و TDOA مکان‌یابی انجام شده است. همچنین در [۶] با استفاده از ترکیب TDOA و FDOA^۷ مکان گسیلنده پیدا شده است. ولی اکثر روش‌های گفته شده به چندین گیرنده نیاز دارند. در FDOA شرط تحرک نیز لازم است. هنگامی که چندین گیرنده وجود داشته باشد، چیدمان این گیرنده‌ها نیز مهم و در دقت مکان‌سنجی موثر است. در [۷] از الگوریتم PSO^۸ برای پیدا کردن گسیلنده با استفاده از TDOA انجام شده و همچنین چیدمان گیرنده‌ها برای کاهش خطای مکان‌یابی گسیلنده بهینه‌سازی شده است. در [۸] وضعیت‌های گوناگون چهار گیرنده در هشت حالت مختلف بررسی و بهترین چیدمان تعیین شده است. همچنین تفاوت‌های چهار گیرنده با پنج گیرنده در [۹] که از TDOA استفاده شده، مقایسه شده است. در [۱۰] با استفاده از چندین گیرنده UAV^۹ به مکان‌یابی غیرفعال یک گسیلنده پیشگر^{۱۰} پرداخته است ولی

اکثر رادارهای پرسشگر، رادارهای استقراری هستند که معمولاً در فرودگاه‌ها وجود دارند. در اطلاعات آزاد معمولاً محل این رادارها صرفاً در حد اینکه در کدام فرودگاه قرار دارند ذکر می‌شود و اطلاعات دقیق‌تری وجود ندارد (بر خلاف سایت‌های DME^۱ و VOR^۲ که مختصات دقیق آنها وجود دارد) و از آنجا که برای تعیین محل برخی از هواپیماها (که در مرحله بعد انجام می‌شود) مکان دقیق پرسشگر مورد نیاز است، مکان‌یابی آنها لازم است. علاوه بر این برخی از فرستنده‌های پرسشگر می‌توانند متحرک باشند. واضح است که در مورد این پرسشگرها نیز، مکان‌یابی به صورت دائمی یک نیاز اساسی است.

روش‌های متنوعی برای مکان‌یابی یک گسیلنده^۳ امواج الکترومغناطیسی ارائه شده است. عمده این روش‌ها از اطلاعات زاویه ورود (AOA^۴) و زمان ورود (TOA^۵) و یا تفاضل زمان ورود (TDOA^۶) و یا با استفاده از اطلاعات فرکانس [۱] به موقعیت‌یابی

* رایانامه نویسنده پاسخگو: m.r.t255abidi@gmail.com

¹ Distance Measuring Equipment
² VHF omnidirectional range
³ Emitter
⁴ Angle Of Arrival
⁵ Time Of Arrival
⁶ Time Difference Of Arrival

⁷ Frequency Difference Of Arrival
⁸ Particle Swarm Optimization
⁹ Unmanned Aerial Vehicle
¹⁰ Scanning

فاصله بین پالس‌های ارسالی است و هر کدام پاسخ متناسب هواپیما را به دنبال دارد. به‌طور مثال مدهای پرکاربرد مدهای ۱، ۲، A/۳، C، S هستند. مد ۳ یا همان A، هویت هواپیما را می‌پرسد و هواپیما در پاسخ به این مد، شماره هویت خود را اعلام می‌کند. این هویت شامل یک کد چهار رقمی است. مد C نیز ارتفاع هواپیما را درخواست می‌کند. مد S یک مد پیچیده‌تر است که در هواپیماهای نوین به‌کار گرفته می‌شود. این مد می‌تواند اطلاعات کد هواپیما، موقعیت هواپیما، ارتفاع هواپیما و... را مخابره کند [۱۳].

همان‌طور که گفتیم پرسشگر زمینی به‌صورت چرخان فضای محیط را جاروب می‌کند و سیگنال‌های پرسش را منتشر می‌کند. ترتیب مدهای پرسش و فاصله زمانی بین این پرسش‌ها می‌تواند متنوع باشد. به سری فاصله زمانی بین این پرسش‌ها PRI^1 می‌گوییم. ما در این مقاله به مکان‌یابی پرسشگرهایی می‌پردازیم که PRI آنها دارای الگوی منظم و متناوبی است. به بیان دیگر فاصله زمانی بین پرسش‌ها از یک الگوی خاصی پیروی می‌کند و به‌طور متناوب تکرار می‌شود. همچنین جهت چرخش آنتن پرسشگر را ساعت‌گرد در نظر می‌گیریم که عموماً این‌گونه هستند. اطلاعات بیشتر در مورد رادارهای نظارتی ثانویه در [۱۲] موجود است.

۳. هندسه مساله

در شکل ۱ هندسه مساله نشان داده شده است. در این شکل می‌بینیم که یک پرسشگر در یک موقعیت نامعلوم وجود دارد که با سرعت زاویه‌ای نامعلومی می‌چرخد. همان‌طور که گفتیم این پرسشگر با الگوی خاصی سیگنال‌های پرسش را منتشر می‌کند و مدهایی نظیر A، C و S را می‌پرسد. هواپیمایی که در محیط حضور دارد، با دریافت پرسش‌های این رادار به هر یک از این مدها پاسخ متناسب را می‌دهد. گیرنده ما در مبدا قرار دارد. این گیرنده، هم سیگنال‌های پرسشگر و هم پاسخ‌های هواپیما را دریافت می‌کند. در گیرنده سیگنال‌های پرسش و پاسخ قابل جداسازی هستند. همان‌طور که گفته شد فرکانس آنها با هم متفاوت است. همچنین اگر چند هواپیما در محیط حضور داشته باشند و به پرسشگر پاسخ بدهند و پاسخ‌های آنها همپوشانی داشته باشد، در [۱۶-۱۴] به جداسازی این پاسخ‌ها پرداخته شده است. بعد از گردآوری این سیگنال‌ها از محیط باید آنها را تجزیه و تحلیل شده و اطلاعات مفید و لازم برای مکان‌یابی پرسشگر استخراج شود. این اطلاعات، زاویه و تفاضل زمانی دریافت سیگنال‌ها است.

به‌صورت جستجوی شبکه‌ای و الگوریتمی که به کمینه کردن تابع هزینه می‌پردازد.

هر کدام از این مقالات، صورت مساله خودشان را طرح کرده‌اند. ما در این مقاله، مساله نوینی را بررسی می‌کنیم که مربوط به مکان‌یابی سامانه رادار نظارتی ثانویه (SSR^1) است. برای این کار تنها از یک گیرنده استفاده خواهیم کرد. در بخش‌های بعدی ابتدا در مورد اصول عملکرد رادارهای نظارتی ثانویه توضیح مختصری می‌دهیم، سپس به بررسی روش ارائه‌شده برای مکان‌یابی هدف می‌پردازیم و حل بسته آن از روی اطلاعات زاویه و تفاضل زمانی را ارائه می‌دهیم، سپس حساسیت سنجی، تخمین حداکثر احتمال (MLE^2) و تخمین حداقل مربعات خطای وزن‌دار ($WLSE^3$) موقعیت را شرح می‌دهیم. در انتها، روش گفته‌شده، روی داده‌های تجربی اعمال و نتایج آن گزارش شده است.

۲. رادارهای نظارتی ثانویه

برای کنترل ترافیک هوایی ابتدا رادارهای نظارتی اولیه (PSR^4) استفاده می‌شد که فقط با دریافت امواج بازتاب‌شده از محیط، هواپیماها را شناسایی می‌کردند. با توجه به گسترش روزافزون رفت و آمد هوایی و مشکلات رادارهای اولیه، سامانه رادارهای نظارتی ثانویه ایجاد و به‌کار گرفته شدند که در آن رادار زمینی، سیگنالی را می‌فرستد و هواپیما پس از دریافت به آن پاسخ می‌دهد. امروزه این دو رادار، با هم استفاده می‌شوند [۱۱-۱۲].

در این سامانه یک فرستنده پیش‌ساز زمینی ثابت، سیگنال‌های پرسشی را در فضا منتشر می‌کند که دارای فرکانس 1030 MHz هستند. به این رادار زمینی پرسشگر^۵ گفته می‌شود. در هواپیماها نیز یک سامانه پاسخگو^۶ تعبیه شده است که با دریافت این سیگنال‌ها، آن را بررسی و پاسخ متناسب با سیگنال دریافتی را منتشر می‌کند. هواپیما هنگامی پاسخ می‌دهد که گلبرگ^۷ اصلی بیم آنتن پرسشگر به سمت هواپیما باشد. برای این که هواپیما در گلبرگ‌های فرعی پاسخی ندهد، از یک بیم کنترل در آنتن پرسشگر استفاده می‌کنند که گلبرگ‌های فرعی را می‌پوشاند. این کار به فرونشانی گلبرگ فرعی (SLS^8) شناخته می‌شود [۱۲]. سیگنال‌های پاسخ نیز در فرکانس 1090 MHz منتشر می‌شوند. سیگنال پرسش حالت‌های (مد) گوناگونی دارد که تفاوت آنها در

¹ Secondary Surveillance Radar

² Maximum Likelihood Estimation

³ Weighted Least Squares Error

⁴ Primary Surveillance Radar

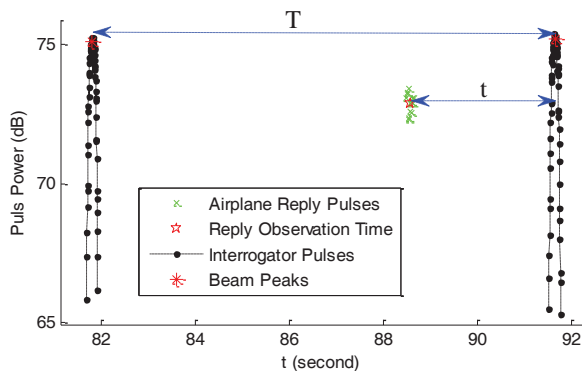
⁵ Interrogator

⁶ Transponder

⁷ Lobe

⁸ SideLobe Suppression

⁹ Pulse Repeat Interval



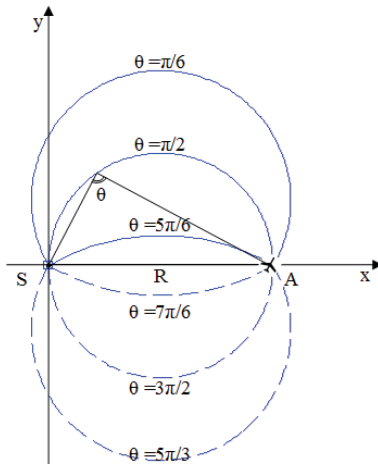
شکل ۲. سیگنال‌های دریافتی از هواپیما و پرسشگر در گیرنده

در این شکل بییم‌های پرسشگر را می‌بینیم که وقتی پرسشگر به سمت ما است آنها را دریافت کرده‌ایم. زمان پویش پرسشگر است. همچنین زمانی که رادار به سمت هواپیما است، پاسخ می‌دهد. پس هنگامی که پاسخ‌های آن را دریافت می‌کنیم، می‌فهمیم که در این لحظه رادار به سمت هواپیما بوده است. از تاخیر زمانی رسیدن پاسخ از هواپیما به گیرنده صرف‌نظر می‌کنیم، چون این تاخیر از مرتبه میکروثانیه است و زمان چرخش رادار از مرتبه ثانیه است.

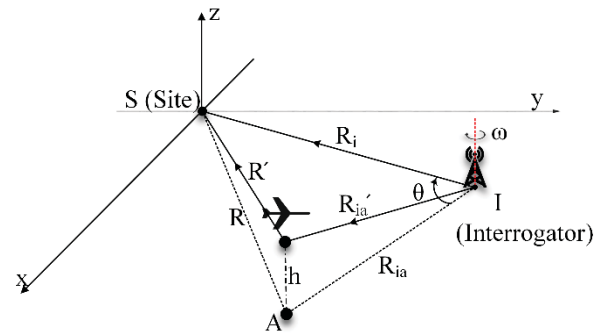
پس زاویه θ که در شکل ۱ نشان داده شده است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta = 2\pi \frac{t}{T}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (1)$$

که T و t در شکل ۲ مشخص شده‌اند. این زاویه یک مکان هندسی برای موقعیت پرسشگر به دست می‌دهد. این مکان هندسی، کماتی از یک دایره است که برای زاویه‌های مختلف در شکل ۳، رسم شده است. این مکان هندسی نقاطی را که نسبت به هواپیما و گیرنده دارای زاویه یکسانی هستند، مشخص می‌کند.



شکل ۳. نقاط روی خطوط آبی رنگ نسبت به نقاط S و A زاویه یکسانی دارند. نقطه A مکان هواپیما و S گیرنده است



شکل ۱. هندسه مساله: شامل مکان گیرنده (مبدا مختصات)، مکان پرسشگر و مکان هواپیما. گیرنده و پرسشگر روی صفحه x-y و هواپیما بالای این صفحه در ارتفاع h است. نقطه A تصویر هواپیما روی صفحه x-y است.

۴. استخراج اطلاعات مفید از سیگنال‌های

جمع‌آوری شده

در هنگام دریافت سیگنال از محیط، تعیین دقیق زمان ورود سیگنال خیلی مهم است. چون ما با استفاده از زمان ورود (TOA) سیگنال‌ها اطلاعات زاویه و تفاضل زمانی را محاسبه خواهیم کرد. تخمین هر چه بهتر زمان ورود سیگنال با توجه به اثرات چندمسیرگی یک بحث چالشی است که زیاد مورد بررسی قرار می‌گیرد. در [۱۷] روشی بر پایه انرژی برای تخمین TOA ارائه شده است. در [۱۸] هم با استفاده از مشخصات سیگنال دریافتی، TOA سیگنال با گیرنده تشخیص انرژی تخمین زده شده است. در [۱۹] برای این کار از روشی بر پایه تئوری اطلاعات استفاده شده و در [۲۰] یک روش مقاوم برای تخمین زمان رسیدن سیگنال با استفاده از معیار حداکثر احتمال ارائه شده است.

سیگنال‌های رادار پرسشگر را زمانی دریافت می‌کنیم که در حین چرخش دهانه‌ی آن به سمت ما باشد. این رادار بعد از یک دور چرخش دوباره به سمت ما قرار می‌گیرد و سیگنال‌های آن را باز دریافت می‌کنیم و همین‌طور الی آخر. همچنین هواپیما هنگامی پاسخ منتشر می‌کند که دهانه رادار به سمت هواپیما باشد و در این زمان هواپیما به آن پاسخ داده و ما سیگنال‌های ارسالی هواپیما را نیز دریافت می‌کنیم. در میان پاسخ هواپیماها اطلاعات چندین مد اعم از S، C، A وجود دارد. ما می‌توانیم برای برخی از هواپیماها که پاسخ مد S آنها را داریم، با کدگشایی پاسخ مد S موقعیت و ارتفاع آنها را به دست آوریم.

۴-۱. تعیین زاویه

زاویه‌ای که اندازه می‌گیریم و در مکانیابی از آن استفاده می‌کنیم، زاویه ورود نیست، بلکه زاویه پرسشگر نسبت به هواپیما و گیرنده است [۲۱]. سیگنال‌هایی که در گیرنده دریافت می‌کنیم، در شکل ۲ نمایش داده شده است.

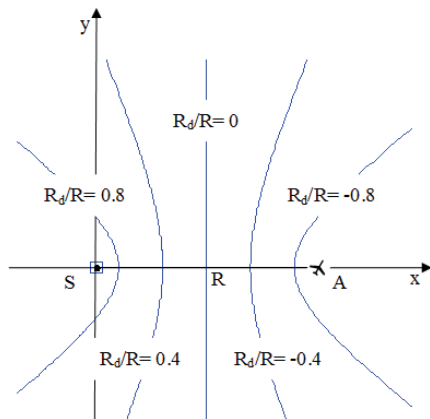
هوایما و گیرنده، R_i فاصله پرسشگر و گیرنده و c سرعت نور است. با توجه به این که موقعیت هوایما را می‌دانیم پس R' معلوم است. همچنین با توجه به این که ارتفاع هوایما در مقایسه با R_{ia}' کوچک است، طول R_{ia}' تقریباً برابر با R_{ia} خواهد بود. R_{ia} فاصله پرسشگر از تصویر هوایما روی صفحه $x-y$ است. پس می‌توانیم رابطه را به صورت دوبعدی بنویسیم. در این صورت R_d که برابر با تفاضل R_{ia}' و R_i است به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_d = R_{ia}' - R_i \approx R_{ia} - R_i = c(TDOA - 3\mu s) - R' \quad (3)$$

بنابراین از روی $TDOA$ اندازه گرفته شده می‌توانیم تفاضل فاصله پرسشگر تا هوایما (R_{ia}) و پرسشگر تا گیرنده (R_i) را به دست آوریم. این تفاضل طولی (R_d) یک مکان هندسی برای موقعیت پرسشگر به دست می‌دهد. نقاطی که دارای تفاضل طولی ثابت R_d از هوایما و گیرنده هستند، مکان هندسی هذلولی را بیان می‌کند که کانون‌های آن هوایما و گیرنده هستند. برای یک هذلولی با فاصله کانون‌های R داریم:

$$-1 \leq \frac{R_d}{R} \leq 1 \quad (4)$$

مکان هندسی نقاط با نسبت‌های R_d/R گوناگون در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل ۵. نقاط روی خطوط آبی رنگ تفاضل طولی ثابتی از نقطه A و S دارند. نقطه A مکان هوایما و S گیرنده است.

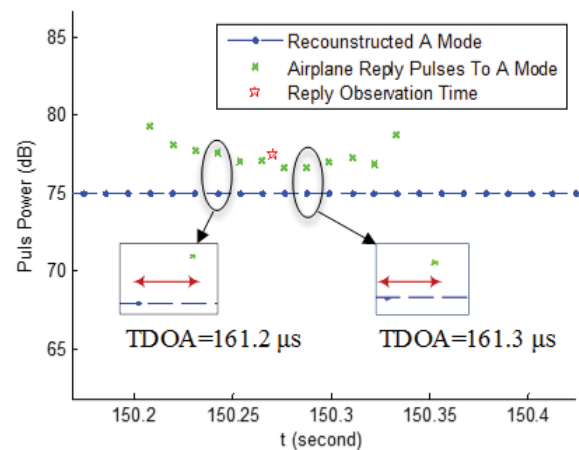
۵. حل بسته موقعیت پرسشگر

پس اطلاعاتی که به دست آوردیم موقعیت هوایما از روی مد S ، زاویه از رابطه (۱) و تفاضل طولی از رابطه (۳) است. همان طور که گفتیم زاویه مکان هندسی دایره‌ای را به ما می‌دهد و تفاضل زمانی مکان هندسی هذلولی را بیان می‌کند. با قطع دادن این دو مکان هندسی می‌توانیم موقعیت پرسشگر را پیدا کنیم. در شکل ۶ این دو مکان هندسی کشیده شده‌اند. در این شکل هوایما در نقطه A و گیرنده در نقطه S (مبدأ) قرار دارد و R فاصله بین هوایما و گیرنده است. هوایما را روی محور x فرض می‌کنیم. θ زاویه اندازه‌گیری شده پرسشگر و R_d تفاضل طولی

۴-۲. تعیین تفاضل زمانی

همان طور که گفتیم پرسشگرهایی که داریم دارای PRI منظم هستند. اگر تعداد کافی از پالس‌های پرسشگر را داشته باشیم، می‌توانیم این PRI را تشخیص دهیم. با دانستن PRI می‌توانیم TOA همه پالس‌های پرسشگر را تولید کنیم و پالس‌هایی را که دریافت نکردیم، می‌توانیم حدس بزنیم. با داشتن همه پالس‌های پرسشگر می‌توانیم اختلاف زمانی دریافت پاسخ هوایما با آنها را به دست آوریم. این کار را با تفاضل زمان دریافت پالس‌های پاسخ و پالس‌های پرسش انجام می‌دهیم. به این تفاضل، $TDOA$ محاسبه شده برای این پاسخ می‌گوییم.

در شکل ۴ پالس‌های پاسخ هوایما و پالس‌های پرسش نشان داده شده‌اند. در این شکل می‌بینیم بعد از چند پالس پرسش، پالس‌های پاسخی را دریافت کرده‌ایم که تاخیری در حد چند صد میکروثانیه داشته‌اند. این تاخیر همان $TDOA$ است که تفاضل TOA پالس پاسخ و TOA پالس پرسش است.



شکل ۴. نحوه محاسبه تفاضل زمانی ($TDOA$)

برای این که این مقایسه درست باشد، باید هر دو در یک مد باشند. حال این تفاضل زمانی چه معنایی دارد؟ با توجه به شکل ۱، پالسی که از پرسشگر منتشر می‌شود بعد از چند لحظه به گیرنده ما می‌رسد. همین پالس چند لحظه بعد از انتشار به هوایما نیز می‌رسد. هوایما آن را دریافت، تحلیل و چند لحظه بعد پاسخ می‌دهد. این پاسخ نیز بعد از چند لحظه به گیرنده ما می‌رسد. مدت زمانی که هوایما پرسش را دریافت، تحلیل و پاسخ می‌دهد طبق استاندارد سازمان بین‌المللی هوانوردی (ICAO)^۱ $3\mu s$ است. پس اختلاف زمانی که در شکل ۴ نشان داده شده است با توجه به شکل ۱ برابر است با:

$$TDOA = \frac{R_{ia}' + R'}{c} + 3\mu s - \frac{R_i}{c} \quad (2)$$

در این رابطه R_{ia}' فاصله هوایما و پرسشگر، R' فاصله

¹ International Civil Aviation Organization

$$\begin{cases} \sin(\gamma) = \frac{R_d}{R} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ L = \frac{R \cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{cases} \quad (7)$$

در مثلث متساوی الساقین ISC داریم:

$$R_i = \frac{L}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{R \cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{R \cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)}{\sin(\theta)} \quad (8)$$

همچنین θ_i را می‌توانیم از جمع γ و زاویه ϕ که متمم $\theta/2$ است، به دست آوریم. پس معادلات مکان پرسشگر در مختصات قطبی به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{cases} R_i = \frac{R \cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)}{\sin(\theta)} \\ \theta_i = \gamma + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \end{cases}, \quad \sin(\gamma) = \frac{R_d}{R} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (9)$$

با داشتن یک مشاهده که شامل R_d ، R و θ است، مختصات R_i و θ_i برای موقعیت پرسشگر به دست می‌آید.

۶. حساسیت سنجی

با داشتن رابطه مکان هدف بر حسب R_d و θ ، می‌توانیم حساسیت این مکان نسبت به این متغیرها را بسنجیم. ابتدا حساسیت نسبت به زاویه را می‌سنجیم. با اندکی تغییر زاویه، هم فاصله هدف تغییر می‌کند و هم زاویه آن. مقدار خطایی که ایجاد می‌شود را می‌توان از رابطه زیر حساب کرد:

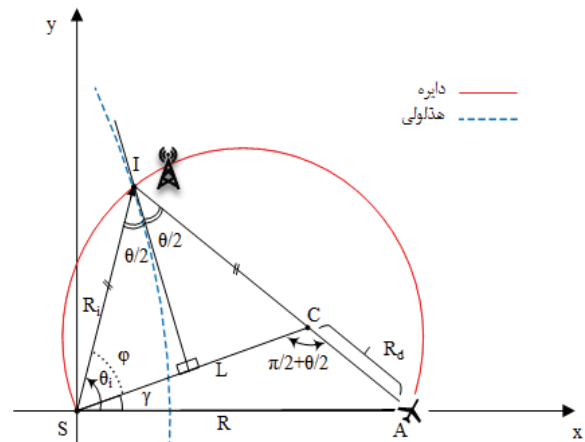
$$E_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial R_i}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta}\right)^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta} = -\frac{\tan \gamma \tan \frac{\theta}{2} + 1}{2},$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial \theta} = \frac{R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\left(\frac{R_d}{R}\right)^2 - 1\right)}{4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\gamma)}$$

در این رابطه E_θ مقدار جابه‌جایی موقعیت هدف به‌ازای یک رادیان تغییر زاویه را بیان می‌کند. اگر این خطا را ضرب در $1 \times \pi/180$ کنیم مقدار خطا به‌ازای یک درجه را به ما می‌دهد. اگر از آن لگاریتم بر مبنای ۱۰ بگیریم، مقدار آن به‌ازای زاویه و تفاضل طولی‌های مختلف به صورت شکل ۷ خواهد بود.

است. محل تلاقی دایره و هذلولی نقطه I است که موقعیت پرسشگر را نشان می‌دهد.



شکل ۶. منحنی دایره‌ای نقاطی که زاویه θ نسبت به S و A دارند را بیان می‌کند و هذلولی نقاطی که تفاضل طولی R_d دارند را نشان می‌دهد. تلاقی این دو منحنی مکان پرسشگر (نقطه I) را نشان می‌دهد. برای این که نقطه I را تعیین کنیم، در مختصات قطبی باید R_i و θ_i را به دست آوریم. برای این کار از نقطه S خطی با زاویه γ می‌کشیم تا خط IA را در نقطه C قطع کند، به طوری که IC برابر با R_i شود. چون از رابطه هذلولی تفاضل IA و R_i برابر R_d است، پس تفاضل IA و IC نیز R_d خواهد شد. بنابراین CA برابر با R_d است.

سپس از نقطه I خطی می‌کشیم تا بر خط SC عمود باشد. چون مثلث ISC متساوی‌الساقین است پس خط کشیده شده زاویه θ را نصف می‌کند. در این صورت داریم:

$$\angle SCA = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

حال ما دو ضلع و یک زاویه مثلث SCA را داریم، بنابراین این مثلث به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود و سایر مشخصات آن را نیز می‌توانیم تعیین کنیم. رابطه سینوس‌ها را برای این مثلث می‌نویسیم:

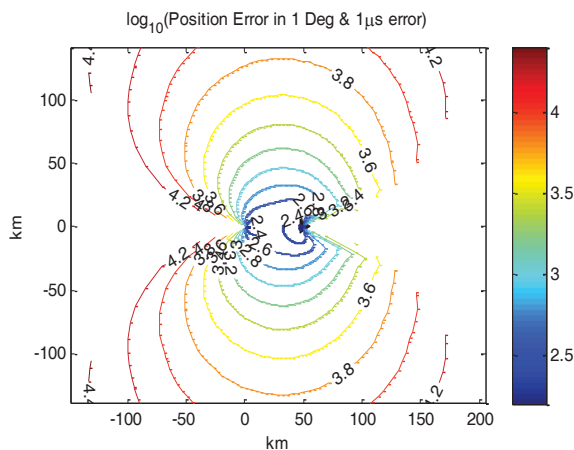
$$\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{R_d}{\sin(\gamma)} = \frac{L}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \gamma\right)} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{R_d}{\sin(\gamma)} = \frac{L}{\cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)}$$

از این رابطه زاویه γ و طول L به صورت رابطه (۷) به دست می‌آید:

در این شکل می‌بینیم که حساسیت در جاهایی که R_d/R به ۱ یا ۰- نزدیک است زیاد است و در جاهایی که این نسبت به صفر نزدیک است، حساسیت نسبت به تفاضل زمانی کم می‌شود.

اگر هواپیما را روی محور x و در فاصله ۵۰ کیلومتری فرض کنیم و ترکیب این دو خطا را در محیط دو بعدی مساله ببینیم حساسیت به صورت شکل ۹ خواهد بود. این شکل مقدار خطای ایجاد شده به ازای یک درجه و یک میکروثانیه خطا، در موقعیت های مختلف پرسشگر را نشان می‌دهد.



شکل ۹. خطای مکان‌یابی به ازای یک درجه خطای اندازه‌گیری زاویه و یک میکروثانیه خطای اندازه‌گیری تفاضل زمانی. گیرنده در مبدا و هواپیما روی محور x در فاصله ۵۰ کیلومتری قرار دارد.

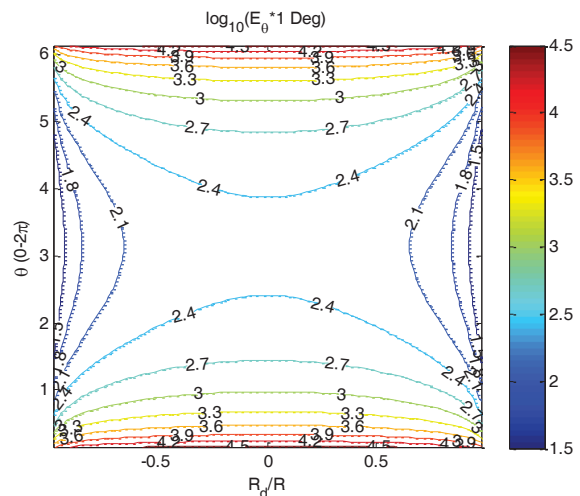
۷. تخمین حداکثر احتمال

اگر چندین مشاهده برای یک پرسشگر داشته باشیم، به خاطر اینکه مشاهدات دارای خطا هستند، مکان‌هایی که برای یک پرسشگر از روی هر مشاهده به دست می‌آید یکسان نخواهند بود.

همان‌طور که در رابطه (۱) گفتیم زاویه از تقسیم زمان مشاهده پاسخ بر زمان پوشش پرسشگر به دست می‌آید. اگر این دو پارامتر نویز با توزیع گوسی^۱ داشته باشند، از آنجا که تقسیم دو نویز گوسی، دارای توزیع کوشی^۲ است، نویز زاویه محاسبه شده دارای توزیع کوشی خواهد بود. نویز تفاضل زمانی را نیز گوسی فرض می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} R_d = R_{d0} + n_{R_d}, & n_{R_d} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{R_d}^2) \\ \theta = \theta_0 + n_\theta, & n_\theta \sim \mathcal{C}(0, \sigma_\theta) \end{cases} \quad (12)$$

در این رابطه مقدار تفاضل طولی است که با نویز جمعی گوسی n_{R_d} با میانگین صفر و واریانس $\sigma_{R_d}^2$ جمع می‌شود و θ_0



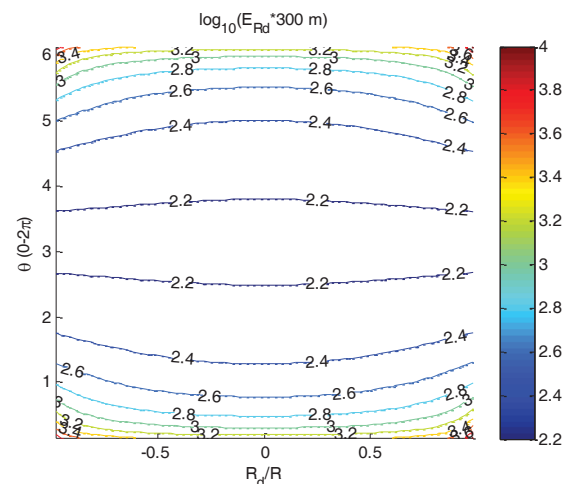
شکل ۷. حساسیت مکان پرسشگر نسبت به زاویه به ازای یک درجه خطا، هنگامی که $R = 50$ km است.

می‌بینیم که در زاویه‌های نزدیک به صفر و 360° درجه خطا خیلی زیاد است و هر چه به 180° درجه نزدیک می‌شود خطا کم می‌شود. این موضوع قابل پیش‌بینی بود، چون در این زاویه‌ها دایره خیلی بزرگ می‌شود و تغییر کوچک آن باعث جابه‌جایی زیاد موقعیت پرسشگر می‌شود.

به همین طریق اگر حساسیت مکان هدف نسبت به R_d را بسنجیم، داریم:

$$E_{R_d} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_i}{\partial R_d}\right)^2 + \left(\frac{R_i \partial \theta_i}{\partial R_d}\right)^2} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{R_d}{R} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}} \quad (11)$$

در این رابطه E_{R_d} مقدار جابه‌جایی موقعیت هدف به ازای یک متر خطای تفاضل طولی را نشان می‌دهد. اگر این رابطه را در 300 متر ضرب کنیم، مقدار خطا به ازای $1 \mu s$ خطای تفاضل زمانی را به ما می‌دهد ($c \times 1 \mu s = 300m$). اگر از آن لگاریتم بر مبنای 10 نیز بگیریم، به صورت شکل ۸ خواهد بود.



شکل ۸. حساسیت مکان پرسشگر نسبت به تفاضل زمانی به ازای یک میکروثانیه خطا، هنگامی که $R = 50$ km است.

¹ Gaussian distribution

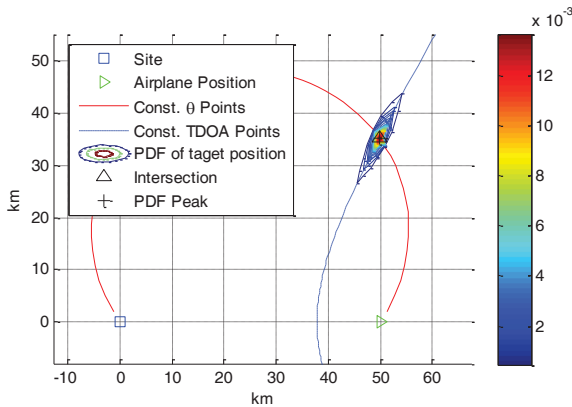
² Cauchy distribution

در نهایت برای تابع توزیع مشترک R_i و θ_i داریم:

$$f_{R_i, \theta_i}(R_i, \theta_i) = \frac{1}{\sigma_{R_d} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_d - R_{d0})^2}{2\sigma_{R_d}^2}} \frac{\sigma_\theta}{\pi(\sigma_\theta^2 + (\theta - \theta_0)^2)} \quad (17)$$

$$* \text{abs} \left(\frac{\cos \gamma \sin^2 \theta}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \left(\gamma - \frac{\theta}{2} \right)} \right) \Bigg|_{R_d=g(R_i, \theta_i), \theta=h(R_i, \theta_i)}$$

در این رابطه عملگر $\text{abs}(\cdot)$ بیانگر قدر مطلق است. پس اگر اطلاعات مشاهده یک هواپیما که شامل R ، R_d و θ است معلوم باشد، تابع توزیع احتمال R_i و θ_i به‌طور کامل مشخص می‌شود. در شکل ۱۰ این تابع توزیع به‌زای یک مشاهده رسم شده است.



شکل ۱۰. تابع توزیع احتمال موقعیت هدف با مشخصات $R=50$ km, $R_d/R=-0.5$, $\theta=37^\circ$, $\sigma_\theta=2^\circ$, $\sigma_r=1\mu s$ مکان دقیق هدف $R_i=80$ km, $\theta_i=42^\circ$ است.

این تابع توزیع در حقیقت همان رابطه تابع توزیع احتمال R_i و θ_i به شرط یک مشاهده است. رابطه (۱۷) برای یک مشاهده که آن را روی محور x در نظر گرفته بودیم صادق است حال اگر هواپیما روی محور x نباشد رابطه (۱۷) را باید به صورت زیر تصحیح کنیم. اگر هواپیما در فاصله R و زاویه α نسبت به محور x باشد و زاویه اندازه‌گیری شده θ و تفاضل طولی R_d باشد، داریم:

$$\begin{cases} f_{R_i, \theta_i | \text{Obs}}(R_i, \theta_i | \text{Obs}) = f_{R_i, \theta_i}(R_i, \theta_i - \alpha) \\ \text{Obs} = \{\theta, R_d, R, \alpha\} \end{cases} \quad (18)$$

اگر N مشاهده برای یک پرسشگر داشته باشیم و نویزها مستقل از هم باشند، تابع توزیع احتمال پرسشگر به شرط همه مشاهدات به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f_{R_i, \theta_i}(R_i, \theta_i | \text{All Obs.}) = \prod_{k=1}^N f_{R_i, \theta_i | \text{Obs}_k}(R_i, \theta_i | \text{Obs}_k) \\ \text{All Obs} = \{\text{Obs}_k\} \quad k = 1, \dots, N \\ \text{Obs}_k = \{\theta, R_d, R, \alpha\}_k \end{cases} \quad (19)$$

حال تخمین‌گر حداکثر احتمال (MLE) به صورت زیر است:

نیز مقدار زاویه است که با نویز جمعی n_θ با توزیع کوشی با پارامترهای صفر و σ_θ جمع می‌شود. همچنین نویز زاویه را مستقل از نویز تفاضل زمانی در نظر می‌گیریم. بنابراین تابع توزیع مشترک این دو به صورت زیر می‌شود:

$$f_{R_d, \theta}(R_d, \theta) = f_{R_d}(R_d) f_\theta(\theta) = \frac{1}{\sigma_{R_d} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_d - R_{d0})^2}{2\sigma_{R_d}^2}} \frac{\sigma_\theta}{\pi(\sigma_\theta^2 + (\theta - \theta_0)^2)} \quad (13)$$

در این رابطه $f_\theta(\theta)$ تابع توزیع احتمال θ و $f_{R_d}(R_d)$ تابع توزیع احتمال R_d و $f_{R_d, \theta}(R_d, \theta)$ تابع توزیع مشترک θ و R_d است. به ازای هر تفاضل زمانی و زاویه ما این تابع توزیع داریم. حال می‌خواهیم از روی این رابطه، تابع توزیع مشترک فاصله (R_i) و زاویه پرسشگر (θ_i) را به‌دست آوریم. برای این کار باید معادلات (۹) را بر حسب R_i و θ_i حل کنیم. با توجه به هندسه مساله برای هر R_i و θ_i یک R_d و θ خاص داریم، پس به جواب یکتا خواهیم رسید. با استفاده از شکل ۶ و ساده‌سازی، R_d و θ بر حسب R_i و θ_i به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{cases} R_d = g(R_i, \theta_i) \triangleq \frac{R \sin \gamma}{\sin(\theta_i - \gamma)} \\ \theta = h(R_i, \theta_i) \triangleq \pi + 2\gamma - 2\theta_i \end{cases} \quad (14)$$

$$\tan 2\gamma = \frac{R \sin \theta_i - R_i \sin 2\theta_i}{R \cos \theta_i - R_i \cos 2\theta_i}$$

با توجه به شکل ۶، در رابطه (۱۴)، R_d از روی رابطه سینوس‌ها در مثلث CSA و θ از روی مثلث متساوی‌الساقین ISC به‌دست آمده است. با توجه به این θ ، زاویه \widehat{IAS} برابر با $\theta_i - 2\gamma$ می‌شود. اگر در مثلث IAS رابطه سینوس‌ها را بنویسیم و بر حسب γ حل کنیم، $\tan 2\gamma$ هم به صورت گفته‌شده در رابطه (۱۴) بدست می‌آید. تابع توزیع احتمال مشترک فاصله و زاویه پرسشگر $(f_{R_i, \theta_i}(R_i, \theta_i))$ را از روی $f_{R_d, \theta}(R_d, \theta)$ به صورت زیر می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$f_{R_i, \theta_i}(R_i, \theta_i) = \frac{f_{R_d, \theta}(R_d, \theta)}{|J(R_d, \theta)|} \quad (15)$$

ماتریس ژاکوبین ($J(R_d, \theta)$) به‌صورت زیر است:

$$J(R_d, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial R_d} & \frac{\partial R_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial R_d} & \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\tan \gamma}{2 \tan \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} & \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \gamma} \left(\left(\frac{R_d}{R} \right)^2 - 1 \right) \\ \frac{\tan \gamma}{R_d} & -\frac{\tan \gamma \tan \frac{\theta}{2}}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\Rightarrow |J(R_d, \theta)| = \left| \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cos \left(\gamma - \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \gamma \sin^2 \theta} \right|$$

¹ Operator

در این رابطه مختصات هواپیما و (x_a, y_a, z_a) مختصات هواپیما و (x_i, y_i, z_i) مختصات پرسشگر است. ما مختصات هواپیما و R_d را داریم. با توجه به این که این معادلات غیرخطی هستند باید طوری آنها را بچینیم تا بتوان مساله را به طور خطی حل کرد، مشابه کارهایی که در [۲۲-۲۳] انجام شده است. برای این کار یک متغیر میانی باید نظر بگیریم تا با به دست آوردن آن مساله حل شود. از رابطه (۲۱) داریم:

$$R_{ia}^2 - R_i^2 = (x_i - x_a)^2 + (y_i - y_a)^2 + (z_i - z_a)^2 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 = -2(x_i x_a + y_i y_a + z_i z_a) + R^2 \quad (22)$$

طرف اول این رابطه برابر است با:

$$R_{ia}^2 - R_i^2 = (R_{ia} - R_i)(R_{ia} + R_i) = R_d(2R_i + R_d) \quad (23)$$

بنابراین داریم:

$$R_d(2R_i + R_d) = -2(x_i x_a + y_i y_a + z_i z_a) + R^2 \Rightarrow x_i x_a + y_i y_a + z_i z_a = \frac{R^2 - R_d^2}{2} - R_d R_i \quad (24)$$

برای هر مشاهده رابطه بالا را داریم. اگر N مشاهده داشته باشیم، همه مشاهدات را می توانیم در رابطه ماتریسی زیر خلاصه کنیم:

$$AX = B + CR_i \quad (25)$$

که در این رابطه، ماتریس های A, X, B, C به صورت زیرند:

$$A = \begin{bmatrix} x_{a1} & y_{a1} & z_{a1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{aN} & y_{aN} & z_{aN} \end{bmatrix}_{N \times 3}, \quad X = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_1^2 - R_d^2 \\ \vdots \\ R_N^2 - R_d^2 \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad C = - \begin{bmatrix} R_{d1} \\ \vdots \\ R_{dN} \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

تخمین حداقل مربعات خطای X به صورت زیر می شود:

$$X = \alpha + \beta R_i \quad (27)$$

که بردارهای α و β مشخص و به صورت زیر هستند:

$$\alpha = (A^T A)^{-1} A^T B, \quad \beta = (A^T A)^{-1} A^T C \quad (28)$$

از رابطه (۲۱) داریم:

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = X^T X \quad (29)$$

با جای گذاری و ساده سازی به معادله درجه دو زیر می رسیم:

$$R_i^2 = \alpha^T \alpha + 2\alpha^T \beta R_i + \beta^T \beta R_i^2 \Rightarrow aR_i^2 + bR_i + c = 0 \quad (30)$$

که ضرایب a, b, c به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} a = (\beta^T \beta - 1) \\ b = 2\alpha^T \beta \\ c = \alpha^T \alpha \end{cases} \quad (31)$$

$$(R_i, \theta_i)_{ML} = \operatorname{argmax}_{R_i, \theta_i} \left(\prod_{k=1}^N f_{R_i, \theta_i}(R_i, \theta_i | \text{Obs}_k) \right) \quad (20)$$

$$= \operatorname{argmax}_{R_i, \theta_i} \left(\sum_{k=1}^N \ln f_{R_i, \theta_i}(R_i, \theta_i | \text{Obs}_k) \right)$$

مختصات $(R_i, \theta_i)_{ML}$ مکانی را به ما می دهد که بیشترین احتمال را دارد. پیدا کردن بیشینه این تابع به صورت حل مستقیم به دلیل غیرخطی بودن آن بسیار پیچیده است. ولی به طور نرم افزاری می توانیم حل کنیم. ما می توانیم در اطراف مکان تقریبی پرسشگر شبکه بندی^۱ کوچکی انجام دهیم و تابع توزیع احتمال را برای همه نقاط آن محاسبه کنیم و نقطه ای را که در آن این تابع بیشینه می شود، به عنوان مکان پرسشگر اعلام کنیم.

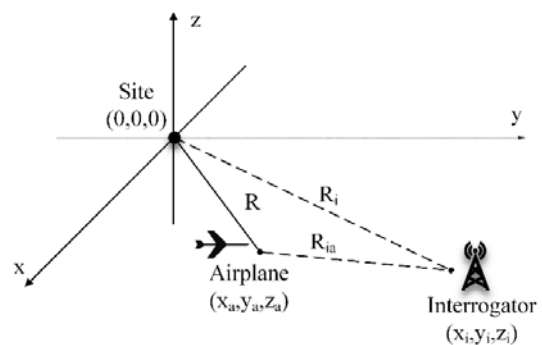
۸. حل از طریق روش حداقل مربعات خطا

در این بخش ابتدا به خطی سازی معادلات تفاضل زمانی و حل مساله از طریق چند معادله تفاضل زمانی می پردازیم. سپس معادلات زاویه را خطی سازی می کنیم و فقط بر اساس آن مکان یابی را انجام می دهیم. سپس به بررسی تخمین حداقل مربعات خطای وزن دار با ترکیب معادلات زاویه و تفاضل زمانی می پردازیم.

۸-۱. خطی سازی معادلات تفاضل زمانی و حل بر

اساس آن

شکل ۱۱ محیط سه بعدی مساله را نشان می دهد.



شکل ۱۱. هندسه سه بعدی مساله برای حل WLSE با استفاده از

اطلاعات TDOA. مختصات هواپیما و

(x_i, y_i, z_i) مختصات پرسشگر است.

در این شکل ما داریم:

$$\begin{cases} R_d = R_{ia} - R_i \\ R = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \\ R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \\ R_{ia} = \sqrt{(x_i - x_a)^2 + (y_i - y_a)^2 + (z_i - z_a)^2} \end{cases} \quad (21)$$

¹ Mesh grid

اگر p, q را در این رابطه بسط بدهیم، برابر می‌شوند با:

$$\begin{cases} p = x_a \cot \theta + y_a \\ q = x_a - y_a \cot \theta \end{cases} \quad (35)$$

که $x_a = R \cos \theta$ و $y_a = R \sin \theta$ هستند. همچنین چون $x_i = R_i \cos \theta_i$ و $y_i = R_i \sin \theta_i$ است، با ضرب طرفین رابطه (۳۴) به R_i و جای‌گذاری p و q ، به رابطه خطی‌شده زیر می‌رسیم:

$$(x_a - y_a \cot \theta)x_i + (x_a \cot \theta + y_a)y_i = R_i^2 \quad (36)$$

برای هر مشاهده زاویه رابطه بالا را داریم. اگر N مشاهده داشته باشیم، همه مشاهدات در رابطه ماتریسی زیر خلاصه می‌شوند:

$$AX = BR_i^2 \quad (37)$$

که در این رابطه ماتریس‌های A, X, B به صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} x_{a1} - y_{a1} \cot \theta_1 & x_{a1} \cot \theta_1 + y_{a1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{aN} - y_{aN} \cot \theta_N & x_{aN} \cot \theta_N + y_{aN} \end{bmatrix}_{N \times 2}, \quad (38)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

تخمین حداقل مربعات خطا برای مکان پرسشگر از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$X = \gamma R_i^2, \quad \gamma = (A^T A)^{-1} A^T B \quad (39)$$

با جای‌گذاری X در معادله R_i ، می‌توانیم R_i را به صورت زیر تعیین کنیم:

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = X^T X = \gamma^T \gamma R_i^4$$

$$\Rightarrow R_i = \sqrt{\frac{1}{\gamma^T \gamma}} \quad (40)$$

و سپس از رابطه (۳۹) موقعیت پرسشگر را هم می‌توانیم به‌دست آوریم. در شکل ۱۳ داده‌های عملی جمع‌آوری‌شده یک هواپیما رسم شده است.

در این شکل چندین مشاهده از این هواپیما در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. در شکل ۱۳-الف، زاویه این مشاهدات و در ۱۳-ب، اطلاعات TDOA نشان داده شده است. در ۱۳-ج، فاصله هواپیما از گیرنده و در ۱۳-د، زاویه هواپیما نسبت به محور x در زمان مشاهده رسم شده است.

در شکل ۱۴ برای این مشاهدات از روی رابطه (۳۳) دایره‌ها رسم شده‌اند و موقعیت هدف با استفاده از حداقل مربعات خطا از روی رابطه (۳۷) پیدا شده است.

رابطه (۳۰) معادله درجه دو است که می‌توانیم آن را حل کنیم و R_i را به صورت زیر تعیین کنیم.

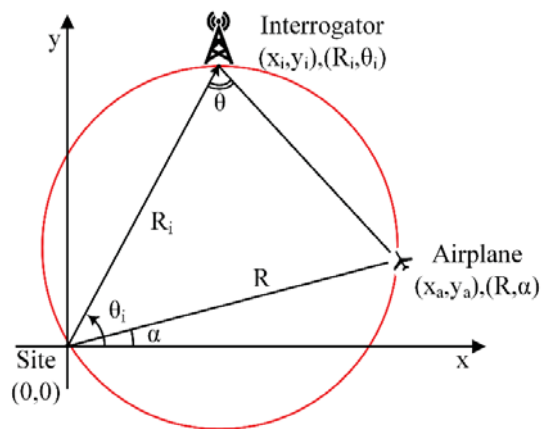
$$R_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (32)$$

بعد از به‌دست آوردن R_i ، با جای‌گذاری آن در رابطه (۲۷) می‌توانیم موقعیت هدف را مشخص کنیم. می‌دانیم R_i باید مثبت باشد. اگر دو جواب برای R_i به‌دست آید آن که به سطح زمین نزدیکتر است را انتخاب می‌کنیم چون عموماً پرسشگرها نزدیک سطح زمین نصب می‌شوند و همچنین تعداد مشاهدات نیز باید ۳ یا بیشتر باشد تا به جواب منحصر به‌فرد برسیم.

۸-۲. خطی‌سازی معادلات زاویه و حل بر اساس آن

همان‌طور که گفتیم برای یک مشاهده زاویه با مقدار θ ، مکان هندسی پرسشگر، کماتی از دایره است. اگر مطابق شکل ۱۲ هواپیما در موقعیت R, α باشد، به راحتی می‌توان نشان داد که معادله قطبی این دایره به صورت زیر است:

$$R_i = \frac{R \sin(\theta_i - \alpha + \theta)}{\sin \theta} \quad (33)$$

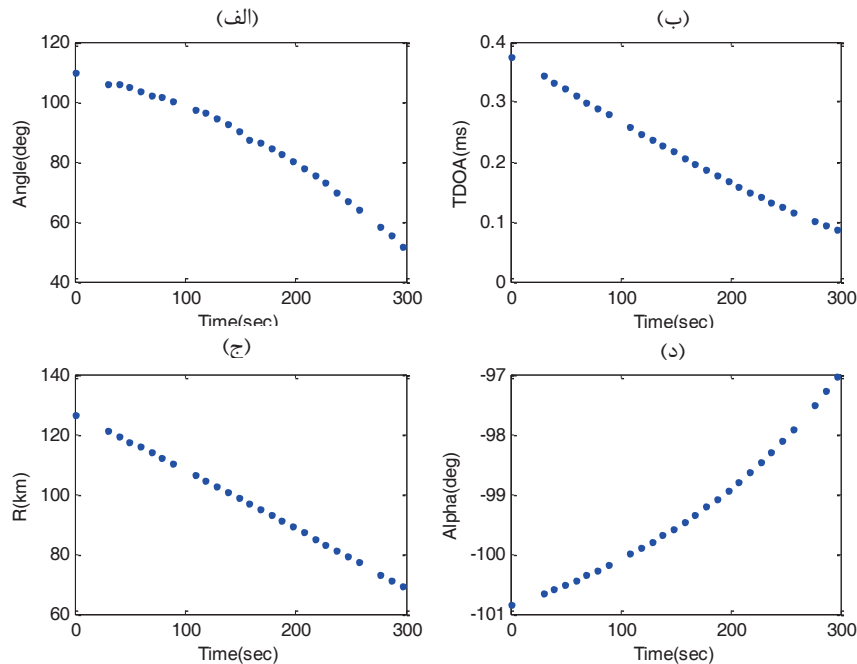


شکل ۱۲. هندسه مساله برای روش حل WLSE با استفاده از اطلاعات زاویه. هواپیما در فاصله R و زاویه α نسبت به محور x قرار دارد.

در این رابطه اگر θ_i بین صفر تا π تغییر کند، تمام دایره نشان داده شده در شکل ۱۲ تشکیل می‌شود. ولی کماتی از دایره که مقابل زاویه θ است، جزء جواب ما نیست و از طرفی در معادله (۳۳) برای این کمان منفی است. پس R_i ‌های مثبت در رابطه (۳۳) جزء جواب ما است.

رابطه (۳۳) را بسط می‌دهیم:

$$R_i = \frac{R \cos(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \sin \theta_i + \frac{R \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \cos \theta_i \quad (34)$$



شکل ۱۳. الف) اطلاعات زاویه پرسشگر. ب) اطلاعات تفاضل زمانی پرسشگر. ج) اطلاعات فاصله هواپیما. د) اطلاعات زاویه هواپیما.

در رابطه (۴۱) از خطای مرتبه دوم صرف نظر شده است. با توجه به این رابطه واریانس خطا به صورت است:

$$\sigma_e^2 = (R_{d0} + R_i)^2 \sigma_{R_d}^2 \quad (42)$$

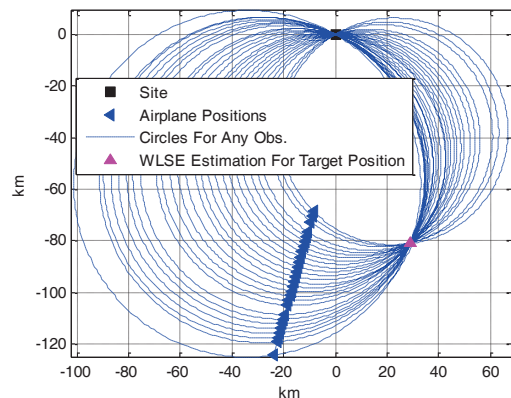
چون در این رابطه R_i مجهول است، این واریانس را به طور مشخص نداریم. در [۲۴-۲۵] برای پیدا کردن ماتریس کواریانس از روش بازگشتی و تکراری استفاده شده است. ولی برای این که وزن مشخصی را تعیین کنیم و از این روش استفاده نکنیم به سراغ حساسیت مکان یابی می رویم. ما می توانیم برای تفاضل زمانی و زاویه هایی که خطای زیادی دارند، وزن کم و برای آنهایی که خطای کمتری دارند، وزن بیشتری بدهیم [۲۶]. از رابطه (۱۱) برای حساسیت نسبت به تفاضل زمانی داریم:

$$E_{R_d} = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{R_d}{R} \cos \frac{\theta}{2}\right)^2}} \quad (43)$$

این حساسیت بر حسب زاویه نیز تغییر می کند. اگر زاویه را ۱۸۰ درجه انتخاب کنیم زاویه پرسشگر صفر می شود و تغییرات آن لحاظ نمی شود. بنابراین زاویه ای انتخاب می کنیم که هم تغییرات زاویه پرسشگر و هم فاصله آن لحاظ شود. به طور مثال ۹۰ درجه فرض می کنیم:

$$E_{R_d} |_{\theta=90} = \frac{1}{\sqrt{2 - \left(\frac{R_d}{R}\right)^2}} \quad (44)$$

همان طور که از این رابطه و شکل ۸ معلوم است، خطا وقتی که R_d/R به صفر نزدیک می شود، کم می شود و با افزایش آن، زیاد می شود. بنابراین ضریب مجهول $(R_{d0} + R_i)^2$ در رابطه



شکل ۱۴. مکان یابی پرسشگر از طریق روش حل WLSE برای مشاهدات شکل ۱۳.

۳-۸. تخمین حداقل مربعات خطای وزن دار با ترکیب زاویه و تفاضل زمانی

اگر معادلات خطی شده زاویه و تفاضل زمانی را ترکیب کنیم باید وزن مناسب به آنها بدهیم. این وزن به صورت دقیق معکوس ماتریس واریانس خطا است. برای تعیین خطا، زاویه و تفاضل طولی را با فرض خطا در معادلات (۲۴) و (۳۶) جایگذاری کنیم. از معادله (۱۲) را در رابطه (۲۴) جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} x_i x_a + y_i y_a + z_i z_a &= \frac{R_a^2 - (R_{d0} + n_{R_d})^2}{2} \\ &- \frac{(R_{d0} + n_{R_d}) R_i}{R_a^2 - R_{d0}^2} \\ &\approx \frac{R_a^2 - R_{d0}^2}{2} - \underbrace{R_{d0} R_i}_{e} - \frac{(R_{d0} + R_i) n_{R_d}}{e} \end{aligned} \quad (41)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_1^2 - R_{d_1}^2 \\ \vdots \\ R_N^2 - R_{d_N}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{2N \times 1},$$

$$C = - \begin{bmatrix} R_{d_1} \\ \vdots \\ R_{d_N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{2N \times 1}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (1)_1 \\ \vdots \\ (1)_N \end{bmatrix}_{2N \times 1}$$

تخمین حداقل مربعات خطای وزن‌دار X به صورت زیر می‌شود:

$$X = \alpha + \beta R_i + \gamma R_i^2 \quad (53)$$

که در آن بردارهای α, β, γ مشخص و به صورت زیر هستند:

$$\alpha = (A^T W A)^{-1} A^T W B, \quad (54)$$

$$\beta = (A^T W A)^{-1} A^T W C,$$

$$\gamma = (A^T W A)^{-1} A^T W D$$

و ماتریس وزن W نیز به صورت زیر است:

$$W = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_{R_d}^2} \sqrt{2 - \left(\frac{R_{d_1}}{R_1}\right)^2}, \dots, \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sigma_{R_d}^2} \sqrt{2 - \left(\frac{R_{d_N}}{R_N}\right)^2}, \frac{4 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}}{R_1 \sigma_\theta^2}, \dots, \frac{4 \sin^2 \frac{\theta_N}{2}}{R_N \sigma_\theta^2} \right) \quad (55)$$

که در آن diag بیانگر ماتریس قطری است. با جای‌گذاری بردار X در رابطه $R_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ و ساده‌سازی آن به معادله چندجمله‌ای درجه چهار زیر می‌رسیم:

$$\gamma^T \gamma R_i^4 + 2\beta^T \gamma R_i^3 + (\beta^T \beta + 2\alpha^T \gamma - 1) R_i^2 + 2\alpha^T \beta R_i + \alpha^T \alpha = 0 \quad (56)$$

با توجه به این که R_i از صفر تا مثلاً چند صد کیلومتر می‌تواند متغیر باشد و منفی هم نمی‌تواند باشد، می‌توانیم آن را به‌وسیله روش‌های عددی حل کنیم. با توجه به شکل ۱۴ معادلات دایره در دو نقطه مبدا و هدف مورد نظر همدیگر را قطع می‌کنند معادله (۵۶) نیز عموماً یک ریشه مثبت نزدیک صفر و یک ریشه مثبت مورد قبول دارد. اگر ضرایب این چندجمله‌ای را از روی مشاهدات شکل ۱۳ تعیین کنیم و منحنی آن را رسم کنیم به صورت شکل ۱۵ می‌شود:

(۴۲) را با رابطه (۴۴) عوض می‌کنیم. پس وزنی که برای هر مشاهده تفاضل زمانی در نظر می‌گیریم به صورت زیر است:

$$W_{R_d} = \frac{1}{\sigma_e^2} = \frac{1}{\sigma_{R_d}^2} \sqrt{2 - \left(\frac{R_d}{R}\right)^2} \quad (45)$$

برای زاویه نیز همین کار را انجام می‌دهیم. θ را از معادله (۱۲) در رابطه (۴۶) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(x_a - y_a \cot(\theta_0 + n_\theta)) x_i + (x_a \cot(\theta_0 + n_\theta) + y_a) y_i = R_i^2 \quad (46)$$

اگر بسط مرتبه اول سری تیلور را برای کتانژنت بنویسیم، داریم:

$$\cot(\theta_0 + n_\theta) = \cot \theta_0 + \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta_0}\right) n_\theta \quad (47)$$

با قرار دادن این رابطه در (۴۶) و ساده‌سازی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(x_a - y_a \cot \theta_0) x_i + (x_a \cot \theta_0 + y_a) y_i = R_i^2 + \frac{x_a y_i - y_a x_i}{\sin^2 \theta_0} n_\theta \quad (48)$$

در این رابطه نیز وارپانس خطا را نداریم. پس به سراغ حساسیت نسبت به زاویه می‌رویم و از رابطه (۱۰) استفاده می‌کنیم. در این رابطه R_d/R را صفر فرض می‌کنیم. بعد از ساده‌سازی حساسیت بر حسب زاویه به صورت زیر می‌شود:

$$E_\theta \Big|_{\frac{R_d}{R}=0} = \frac{R}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (49)$$

بر اساس این رابطه و همان‌طور که در شکل ۷ مشخص است، خطا در زاویه ۱۸۰ درجه کمترین و در نزدیکی‌های صفر و ۳۶۰ درجه خیلی زیاد است. بنابراین وزن هر معادله زاویه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$W_\theta = \frac{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{R \sigma_\theta^2} \quad (50)$$

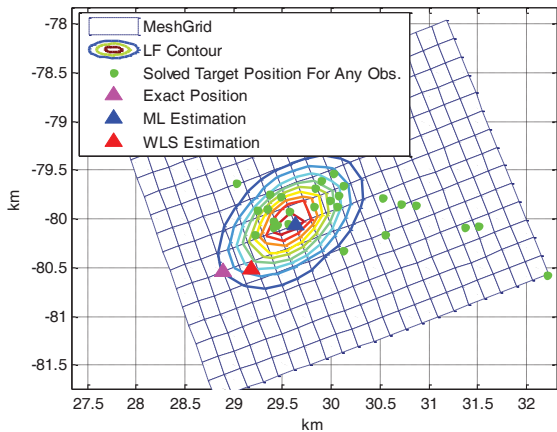
اگر N مشاهده داشته باشیم که شامل زاویه و تفاضل طولی و موقعیت هواپیما باشد، با ترکیب معادلات (۳۷) و (۲۵) به رابطه ماتریسی زیر می‌رسیم:

$$AX = B + CR_i + DR_i^2 \quad (51)$$

که ماتریس‌های A, X, B, C, D به صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} x_{a_1} & y_{a_1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{a_N} & y_{a_N} \\ x_{a_1} - y_{a_1} \cot \theta_1 & x_{a_1} \cot \theta_1 + y_{a_1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{a_N} - y_{a_N} \cot \theta_N & x_{a_N} \cot \theta_N + y_{a_N} \end{bmatrix}_{2N \times 2}, \quad (52)$$

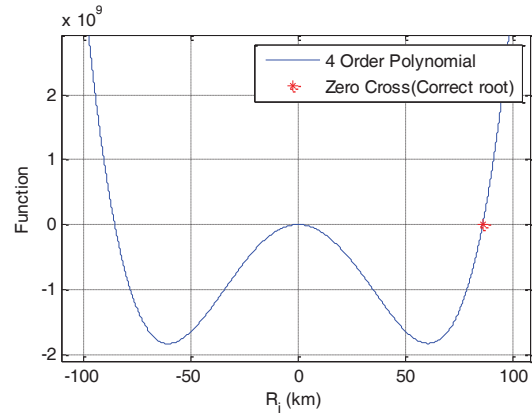
تابع احتمال (۱۹) را محاسبه نموده و بیشینه آن را پیدا می‌کنیم و به‌عنوان تخمین ML در نظر می‌گیریم. در شکل ۱۷ شبکه‌بندی و مکان تخمین ML نشان داده شده است. برای محاسبه تخمین حداقل مربعات خطای وزن‌دار هم از رابطه (۵۳) استفاده می‌کنیم. این تخمین نیز در شکل ۱۷ آورده شده است.



شکل ۱۷. نقاط به‌دست‌آمده برای محل پرسشگر و شبکه‌بندی انجام‌شده برای تخمین ML و تابع توزیع احتمال در شکل رسم شده‌اند. محل تخمین حداکثر احتمال و محل تخمین حداقل مربعات خطای وزن‌دار به‌همراه مکان دقیق پرسشگر هم مشخص شده‌اند.

حالا موقعیت‌های تخمین‌زده‌شده را با موقعیت دقیق پرسشگر مقایسه می‌کنیم. موقعیت تخمین‌زده‌شده از طریق ML در حدود ۸۵۰ متر با موقعیت دقیق فاصله دارد و با توجه به این‌که فاصله این پرسشگر از گیرنده حدود ۸۵ کیلومتر است حدود ۱ درصد خطا داریم. همچنین فاصله تخمین WLS از موقعیت دقیق حدود ۲۵۰ متر است که تقریباً ۰/۳ درصد خطا داریم. البته با تغییر مشاهدات، این خطاها می‌توانند تغییر کنند. مشاهداتی که در اینجا بررسی کردیم به‌طور متقارن در اطراف هدف پراکنده نبودند و این باعث شده است که تخمین ML به خاطر بایاس داشتن TDOA (به دلیل تغییرات سرعت نور در جو) به یک سمت کشیده شود.

دو روش گفته‌شده فرق اساسی با هم دارند. در روش MLE پیدا کردن بیشینه (LF(Likelihood Function) که در معادله (۲۰) آمده به دلیل این‌که معادله غیرخطی بسیار پیچیده‌ای است، تقریباً نشدنی است. پس باید به صورت نرم‌افزاری، یک نقطه را به‌عنوان جواب تعیین کرد و این باعث می‌شود هزینه محاسبات زیاد شود. ولی در روش WLS محل هدف به‌طور مستقیم تعیین می‌شود و یک نقطه مشخص به‌صورت حل بسته به‌عنوان جواب اعلام می‌شود و هزینه محاسبات خیلی کمتر روش قبلی است. در عوض روش MLE در برابر خطای پرت مقاوم است یعنی اگر داده‌ای با خطای زیاد مشاهده شود، جواب نهایی تخمین ML

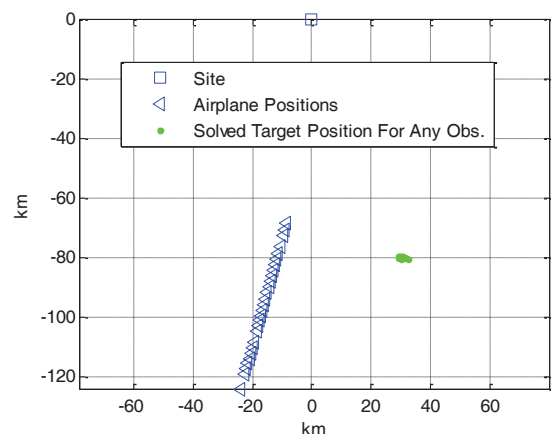


شکل ۱۵. تعیین ریشه چندجمله‌ای درجه چهار معادله (۵۶) که ضرایب آن از روی مشاهدات شکل ۱۳ تعیین شده است.

با تعیین ریشه قابل قبول این چندجمله‌ای R_i به‌دست می‌آید و با داشتن R_i می‌توانیم موقعیت پرسشگر را از روی معادله (۵۳) تعیین کنیم.

۹. اعمال حل بر روی داده‌های تجربی

همان‌طور که گفتیم در شکل ۱۳ داده‌های عملی جمع‌آوری شده‌ی یک هواپیما رسم شده است. در این شکل چندین مشاهده از این هواپیما در زمان‌های مختلف نشان داده شده است که شامل زاویه و TDOA و فاصله هواپیما از گیرنده و زاویه هواپیما نسبت به محور x است. ما می‌توانیم برای هر یک از مشاهدات، مکان پرسشگر را از روی رابطه (۹) به‌دست آوریم. در شکل ۱۶ موقعیت هواپیماهای مشاهده‌شده و موقعیت‌های پیدا شده برای مکان پرسشگر رسم شده است.



شکل ۱۶. موقعیت سایت و هواپیماهای مشاهده‌شده و مکان‌های به‌دست‌آمده برای پرسشگر از روی هر مشاهده.

اگر از نمای نزدیک به این موقعیت‌های پیدا شده نگاه کنیم، می‌بینیم که در یک محوطه کوچک پراکنده شده‌اند (شکل ۱۷) و این به خاطر خطای مشاهدات است. حال تخمین ML را به‌دست می‌آوریم. در این محوطه کوچک

- [10] H. Hmam and K. Dogancay, "Passive localization of scanning emitters," *Aerosp. Electron. Syst., IEEE Trans.*, vol. 46, no. 2, pp. 944–951, 2010.
- [11] P. Bezousek, M. Chyba, V. Schejbal, S. Karamazov, T. Zalabsky, and L. Cernik, "Combined antenna array for primary and secondary surveillance radars," in *Antennas and Propagation in Wireless Communications (APWC)*, 2014 IEEE-APS Topical Conference on, pp. 597–600, 2014.
- [12] M. C. Stevens, "Secondary Surveillance Radar," Artech House, Boston and London, 1988.
- [13] E. Chang, R. Hu, D. Lai, R. Li, Q. Scott, and T. Tyan, "The story of mode s," pp. 1–40, Dec. 2000.
- [14] P. Svabeni, D. Zeman, R. Balada, and Z. Fedra, "Separation of secondary surveillance radar signals," in *Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, 2011 34th International Conference on, pp. 487–490, 2011.
- [15] N. Petrochilos, G. Galati, and E. Piracci, "Projection techniques for separation of multiple secondary surveillance radar sources in a real environment," in *Sensor Array and Multichannel Processing*, 2006. Fourth IEEE Workshop on, pp. 344–348, 2006.
- [16] N. Petrochilos and A.-J. vanderveen, "Algorithms to separate overlapping secondary surveillance radar replies," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2004. Proceedings. (ICASSP'04). IEEE International Conference on, vol. 2, pp. 49–52, 2004.
- [17] A. D'amico, U. Mengali, and L. Taponecco, "Energy-Based TOA Estimation," *IEEE Trans. Wirel. Commun.*, vol. 7, no. 3, pp. 838–847, Mar. 2008.
- [18] W. Liu, H. Ding, X. Huang, and Z. Liu, "TOA Estimation in IR UWB Ranging with Energy Detection Receiver Using Received Signal Characteristics," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 16, no. 5, pp. 738–741, May 2012.
- [19] A. Giorgetti and M. Chiani, "Time-of-Arrival Estimation Based on Information Theoretic Criteria," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 61, no. 8, pp. 1869–1879, Apr. 2013.
- [20] O. Bialer, D. Raphaeli, S. Member, and A. J. Weiss, "Efficient time of arrival estimation algorithm achieving maximum likelihood performance in dense multipath," *Signal Process. IEEE Trans.*, vol. 60, no. 3, pp. 1241–1252, 2012.
- [21] S. Processing, C. A. Conference, B. Colakoglu, B. Eravci, and A. Bayri, "Emitter localization based on antenna scan properties," in *Signal Processing and Communications Applications (SIU)*, 2011 IEEE 19th Conference on, no. Siu, pp. 554–557, 2011.
- [22] L. Lin, H. So, F. Chan, Y. Chan, and K. Ho, "A new constrained weighted least squares algorithm for TDOA-based localization," *Signal Processing*, vol. 93, no. 11, pp. 2872–2878, Nov. 2013.
- [23] F. Chan, H. So, J. Zheng, and K. Lui, "Best linear unbiased estimator approach for time-of-arrival based localisation," *Signal Process. IET*, vol. 2, no. 2, pp. 156–162, 2008.
- [24] J. Shen, A. F. Molisch, and J. Salmi, "Accurate passive location estimation using TOA measurements," *Wirel. Commun. IEEE Trans.*, vol. 11, no. 6, pp. 2182–2192, 2012.
- [25] J. Shen and A. F. Molisch, "Passive location estimation using TOA measurements," in *2011 IEEE International Conference on Ultra-Wideband (ICUWB)*, pp. 253–257, 2011.
- [26] M. Soltanian, A. M. Pezeshk, A. Mahdavi, and M. Dallali, "A new iterative position finding algorithm based on Taylor series expansion," in *Electrical Engineering (ICEE)*, 2011 19th Iranian Conference on, pp. 1–4, 2011.

خیلی تحت تاثیر قرار نمی‌گیرد. اما روش WLSE در برابر خطای پرت مقاوم نیست و داده با خطای پرت، مکان پرسشگر را جابه‌جا می‌کند.

۱۰. نتیجه گیری

این مقاله به دنبال ارائه یک روش تک نقطه‌ای برای تعیین محل رادارهای ثانویه بوده‌است. ولی برای حصول به این مهم، مسائل دیگری از جمله روش تعیین زاویه اهداف، روش استخراج پالس ها و ... ذکر شده است و نشان داده شد که با هر دو روش MLE و WLSE می‌توان مساله را حل کرد. در این مقاله مکان پرسشگر یک سامانه رادار نظارتی ثانویه با استفاده از یک گیرنده پیدا شد و با استفاده از اطلاعات زاویه پرسشگر و تفاضل زمانی آن، حل بسته‌ای در مختصات قطبی ارائه شده و تخمین ML مکان هدف پیدا شد. سپس به خطی‌سازی معادلات زاویه و تفاضل زمانی پرداخته و با ترکیب آنها و دادن وزن‌های مناسب تخمین حداقل مربعات خطای وزن‌دار هم به دست آمد.

۱۱. مراجع

- [1] Y. Kalkan and B. Baykal, "Target localization and velocity estimation methods for frequency-only MIMO Radars," in *Radar Conference (RADAR)*, 2011 IEEE, no. MI, pp. 458–463, 2011.
- [2] C. A. Berdanier and Z. Wu, "A novel RF emitter localization method through phase information," in *2013 IEEE Radar Conference (Radar Con13)*, pp. 1–5, 2013.
- [3] C. Liu, J. Yang, and F. Wang, "Joint TDOA and AOA location algorithm," *Syst. Eng. Electron. J.*, vol. 24, no. 2, pp. 183–188, 2013.
- [4] X. Dingjie, N. Xiuli, S. Feng, and F. Zhenduo, "Location Algorithm Using DOA/TDOA in Multi-Stations Based on Midperpendicular Plane Segmentation," in *2012 Second International Conference on Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control*, no. 1, pp. 1050–1054, 2012.
- [5] Y. Norouzi and M. Derakhshani, "Joint time difference of arrival/angle of arrival position finding in passive radar," *IET radar, sonar navig.*, vol. 3, no. 2, pp. 167–176, 2009.
- [6] D. Musicki, R. Kaune, and W. Koch, "Mobile emitter geolocation and tracking using TDOA and FDOA measurements," *Signal Process. IEEE Trans.*, vol. 58, no. 3, pp. 1863–1874, 2010.
- [7] O. Cakir, I. Kaya, and A. Yazgan, "Optimization of receiver arrangements for emitter location finding using time difference of arrival," in *2013 36th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, pp. 376–379, 2013.
- [8] Y.-P. Lei, F.-X. Gong, and Y.-Q. Ma, "Optimal distribution for four-station TDOA location system," in *2010 3rd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics*, vol. 7, no. Bmei, pp. 2858–2862, 2010.
- [9] G. Xiang-yi and Y. Guang-ping, "Passive Emitter Position Estimation Algorithm Using Time Difference of Arrival of Five Sites," in *2006 CIE International Conference on Radar*, vol. 2004, no. 1, pp. 1–4, 2006.

Passive Localization of Secondary Surveillance Radar Interrogators

M. Abidi*, Y. Norouzi, O. Salimi

Amirkabir University of Technology

(Received: 08/02/2015, Accepted: 08/01/2016)

Abstract

Due to increasing growth of air traffic, it is very important to have a reliable air traffic control system. Usually secondary surveillance radar systems are employed for this task. In this paper, a new approach is presented to identify interrogators location of this system. The proposed method works passively and uses just a single receiver. This goal has been reached using angle and time difference of arrival information. How to determine the desired angle and calculate the time difference of arrival from the received data is described. knowing this information, a closed-form solution in polar coordinate is presented and its sensitivity is measured. Then a method is proposed based on maximum likelihood estimation of the target location. Afterward angle and time difference of arrival equations are linearized and then weighted least squares estimation is achieved. The suggested approach is evaluated on real and practical information and the results have finally been reported.

Keywords: Passive Location, Secondary Surveillance Radars (SSR), TDOA, Angle Information, MLE, WLSE.

* Corresponding author E-mail: m.r.t255abidi@gmail.com